Fachhochschule Mannheim Fachbereich Maschinenbau Prof. Dr.-Ing. H. Bräutigam	**Formelsammlung**	**Technische Mechanik** **Kinetik** Blatt K5

Thema: Impulssatz, Stoßvorgänge von Punktmassen

Formelsammlung:

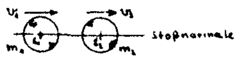
Umformung des Newtonschen Grundgesetzes :

$\boxed{\underset{\sim}{F} = \frac{d\underset{\sim}{p}}{dt}}$, Zeitintegration : $\boxed{\int_{t_0}^{t_1} \underset{\sim}{F}\, dt = \underset{\sim}{p}_1 - \underset{\sim}{p}_0}$, Impulssatz mit:

$\underset{\sim}{F}$ = Summe der eingeprägten Kräfte und Zwangskräfte; $\underset{\sim}{p} = m\underset{\sim}{v}$ = Impuls, wobei m = Masse des Körpers, $\underset{\sim}{v}$ = Geschwindigkeit des Körpers.

Anwendung des Impulssatzes hauptsächlich auf Stoßvorgänge zweier Massen.

A Gerader zentraler Stoß



1. Vollelastischer Stoß ($\varepsilon = 1$) - Impulserhaltung, Energiesatz

$$V_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)\ ,\quad V_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)\ ,\quad \Delta T = 0$$

2. Vollplastischer Stoß ($\varepsilon = 0$) - Impulserhaltung, Kinematik

$$V_1 = V_2 = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\ ,\qquad \Delta T = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2)^2$$

3. Wirklicher Stoß ($0 < \varepsilon < 1$) - Impulserhaltung, Stoßzahlglg.

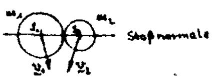
$$V_1 = v_1 - \frac{m_2(1+\varepsilon)}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)\ ,\quad V_2 = v_2 + \frac{m_1(1+\varepsilon)}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2)^2\,(1-\varepsilon^2)$$

Def. der Stoßzahl ε : $\varepsilon = \frac{V_2 - V_1}{v_1 - v_2}$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$

B Schiefer zentraler Stoß

Impulssatz vektoriell auswerten:



Für Normalkomponenten : wie gerader Stoß

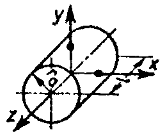
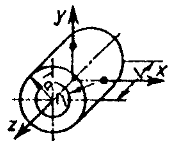
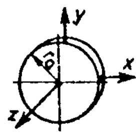
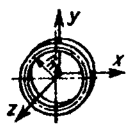
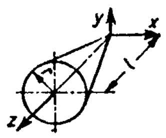
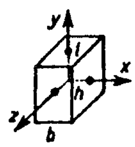
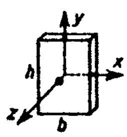
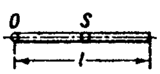
Für Tangentialkomponenten : wenn glatte Stoßränder, dann diese ungeändert

Anmerkung: Eine positive Geschwindigkeitsrichtung ist zu wählen ! Entsprechend dieser Wahl sind die Geschwindigkeiten vorzeichenrichtig in die Formeln einzusetzen !

Aufgaben: K-ISM*

$*$:= Näherung

Massenträgheitsmomente einiger Körper

1. Zylinder	 	$\Theta_x = \Theta_y = m\,(r_a^2/4 + l^2/12)$ $\Theta_z = m\,r_a^2/2$
2. dickwandiger Hohlzylinder	 	$\Theta_x = \Theta_y = m\,[(r_a^2 + r_i^2)/4 + l^2/12]$ $\Theta_z = m\,(r_a^2 + r_i^2)/2$
3. dünne Kreisscheibe	 	$\Theta_x = \Theta_y = m\,r_a^2/4$ $*$ $\Theta_z = m\,r_a^2/2$
4. dünner Kreisring	 	$\Theta_x = \Theta_y = m\,r_m^2/2$ $*$ $\Theta_z = m\,r_m^2$ $*$
5. Kreiskegel	 	$\Theta_x = \Theta_y = (3/5)\,m\,(r^2/4 + l^2)$ $\Theta_z = (3/10)\,m\,r^2$
6. Quader	 	$\Theta_x = m\,(h^2 + l^2)/12$ $\Theta_y = m\,(b^2 + l^2)/12$ $\Theta_z = m\,(b^2 + h^2)/12$
7. dünne Rechteckplatte	 	$\Theta_x = m\,h^2/12$ $*$ $\Theta_y = m\,b^2/12$ $*$ $\Theta_z = m\,(h^2 + b^2)/12$
8. dünner Stab	 	$\Theta_S = m\,l^2/12$ $*$ $\Theta_0 = m\,l^2/3$ $*$

Thema: Prinzip von d'Alembert für Drehung starrer Körper um feste Achsen

Formelsammlung:

Ziel: Aufstellung der Bewegungsgleichung

Prinzip von d'Alembert

$$\boxed{M + M_T = o}$$

M = Moment der äußeren Kräfte

$M_T = - J \cdot \alpha$ = d'Alembert'sches Trägheitsmoment

$J = \int_{(m)} r^2 \, dm$ = Drehmasse des Körpers bzgl. einer festen Achse

α = Winkelbeschleunigung des Körpers

$J_A = J_S + ma^2$ Satz von Steiner

J_s Drehmasse des Körpers bezüglich Schwerpunkt

a Abstand der parallelen Drehachsen

Kinetische Energie eines rotierenden Körpers: $\boxed{T = \frac{J}{2} \omega^2}$

Thema: Arbeitssatz, Energiesatz für Drehung starrer Körper um feste Achsen

Formelsammlung:

Arbeitssatz: $\boxed{W = T_1 - T_o}$

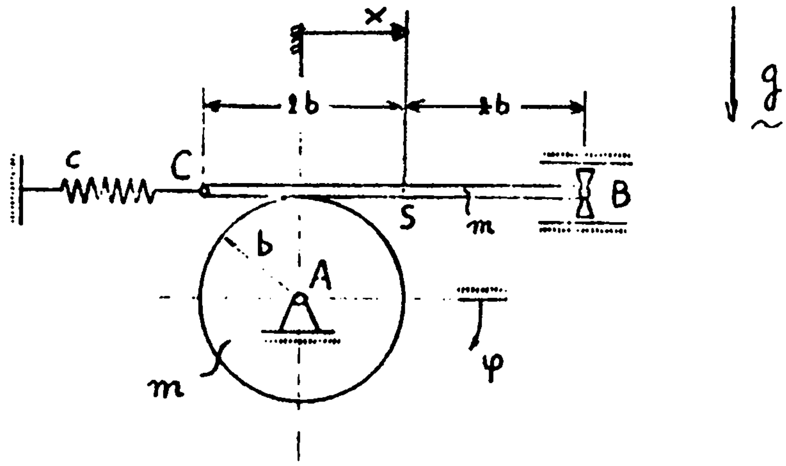
$$\boxed{W = \int_{\varphi_o}^{\varphi_1} M d\varphi \ , \ T = \frac{J}{2} \omega^2}$$

M Moment, J Drehmasse
ω Winkelgeschwindigkeit

Energiesatz: $\boxed{T_o + V_o = T_1 + V_1}$

Aufgaben: K-DAD*, K-ESD*, K-ASD*

Aufgabe K-DAD 1



Eine im Punkt B horizontal geführte starre Stange der Masse m und der Länge 4 b liegt auf einer starren, homogenen Kreisscheibe mit der Masse m und dem Radius b, die sich reibungsfrei um den festen Lagerpunkt A drehen kann. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Stange und Scheibe sei μ. Der Endpunkt C der Stange ist über eine masselose Feder $c = mg/2b$ mit der festen Umgebung verbunden. Feder bei $x = 0$ entspannt.

1. Mit dem Prinzip von d'Alembert berechne man die an der Stange angreifenden Reaktionskräfte und die Bewegungsgleichung, wenn die Scheibe auf der Stange abrollt.
2. Wie groß darf die Amplitude x_{max} höchstens sein, damit die Haftreibung das Abrollen der Scheibe erzwingen kann?

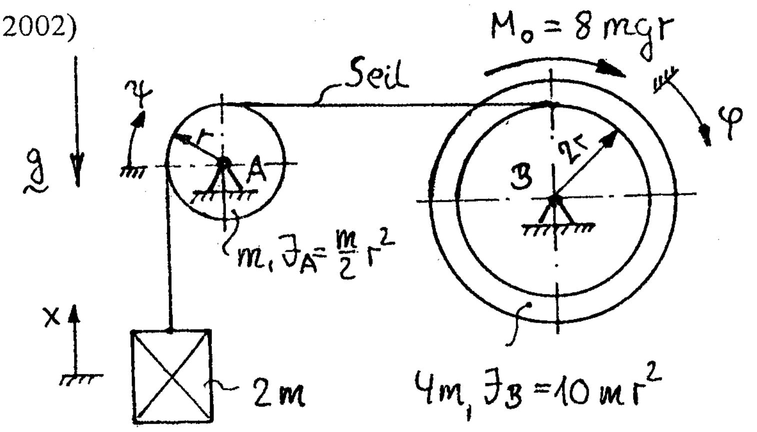
Lösung:

1. $\ddot{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{g}{b}\cdot x = 0$

2. $x_{max} < b\left(\sqrt{1+12\mu} - 1\right)$

Aufgabe K-DAD 10 (Abschlussklausur SS 2002)

Über eine mit dem Moment M_0=8mgr angetriebene Seilwinde soll das Gewicht (Masse 2m) angehoben werden. Die Umlenkrolle (Masse m) ist reibungsfrei drehbar gelagert und arbeitet schlupffrei. Das Seil sei undehnbar.



1. Man bestimme die kinematischen Beziehungen $\dot{x}(\dot{\varphi})$ und $\dot{\psi}(\dot{\varphi})$.

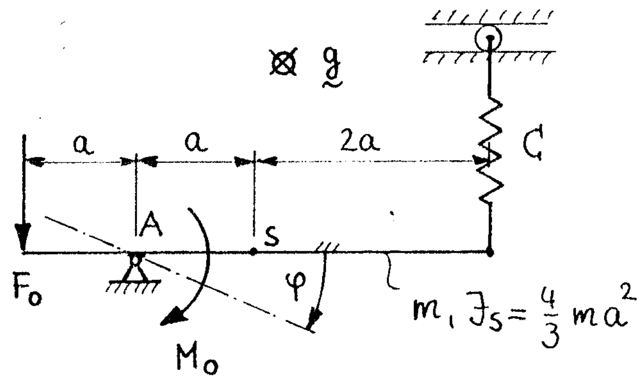
2. Man schneide die 3 Massen des Systems gemäß Prinzip von d'Alembert einzeln frei (Skizzen!), und trage alle Kräfte und Momente einschließlich der Trägheitswirkungen an.

3. Man berechne die Bewegungsgleichung des Systems in der φ-Koordinate.

Lösung: 1. $\dot{x} = 2r\dot{\varphi}$, $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$. 3. $\ddot{\varphi} = \frac{g}{5r}$.

Aufgabe K-ASD 2 (Abschlussklausur WS 99/00)

An einem in A drehbar gelagerten Stab greifen das konstante Moment M_0, die konstante Kraft F_0 (stets vertikal wirkend) und eine Feder mit der Federkonstanten C (ebenfalls stets vertikal wirkend) an. Die Feder sei für φ=0 spannungslos.

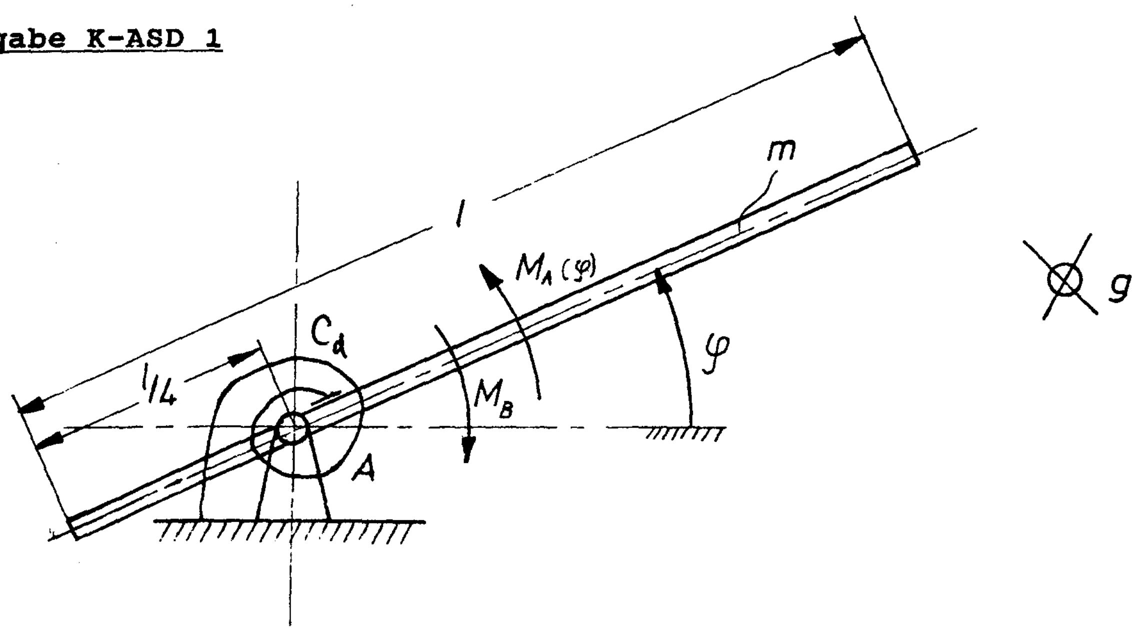


1. Man ermittle die kinetische Energie T in allgemeiner Lage φ.

2. Mit dem Arbeitssatz bestimme man die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$, wenn das System bei φ=0 in Ruhe war.

Lösung: 1. $T = \frac{7}{6} m a^2 \dot{\varphi}^2$; 2. $\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{6}{7ma^2}\left[-F_0 a \sin\varphi + M_0\varphi + \frac{9}{4} C a^2 (\cos 2\varphi - 1)\right]}$

Aufgabe K-ASD 1



Eine starre homogene Stange mit der Masse m und der Länge l ist bei A drehbar gelagert. Sie befindet sich zunächst in einer Lage $\varphi = 0$ und wird durch ein Moment $M_A(\varphi) = M_0(1+\sin\varphi)$ ohne Anfangsgeschwindigkeit in Bewegung gesetzt. Der Drehung entgegen wirkt eine masselose Drehfeder mit der Drehfederkonstanten C_d, die bei $\varphi = 0$ vollkommen entspannt ist und ein konstantes Bremsmoment M_B durch die Lagerreibung. Die Schwerkraft sei auf den Bewegungsvorgang ohne Einfluß.

1. Man berechne mit dem Arbeitssatz die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion des Winkels φ.

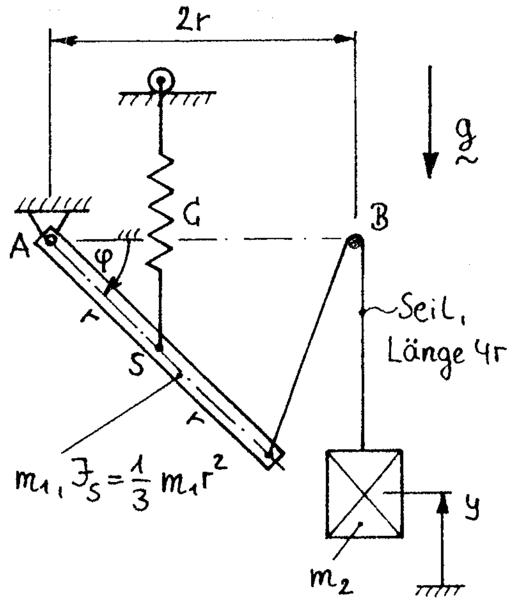
2. Wie groß muß die Drehfederkonstante C_d gewählt werden, damit der Stab die Lage $\varphi_1 = \pi/3$ mit einer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi_1) = \omega_1$ durchläuft?

Lösung: 1. $\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{96}{7ml^2}\left[(M_0 - M_B)\varphi + M_0(1-\cos\varphi) - \frac{C_d}{2}\varphi^2\right]}$

2. $C_d = \frac{18}{\pi^2}\left[(M_0 - M_B)\frac{\pi}{3} + \frac{M_0}{2} - \frac{7ml^2\omega_1^2}{96}\right]$

Aufgabe K-ESD 5 (Abschlußklausur WS 97/98)

Ein Stab der Länge 2r und eine Punktmasse sind über ein masseloses, undehnbares Seil der Länge 4r miteinander verbunden, das im Punkt B reibungsfrei umgelenkt wird. Die stets vertikal wirkende Dehnfeder (Federkonstante C) sei für $\varphi=0$ spannungslos. Das System wird aus der Anfangslage $\varphi=y=0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen.



1. Aus der Geometrie ermittle man den Zusammenhang $y(\varphi)$ und daraus $\dot{y}(\varphi,\dot{\varphi})$.

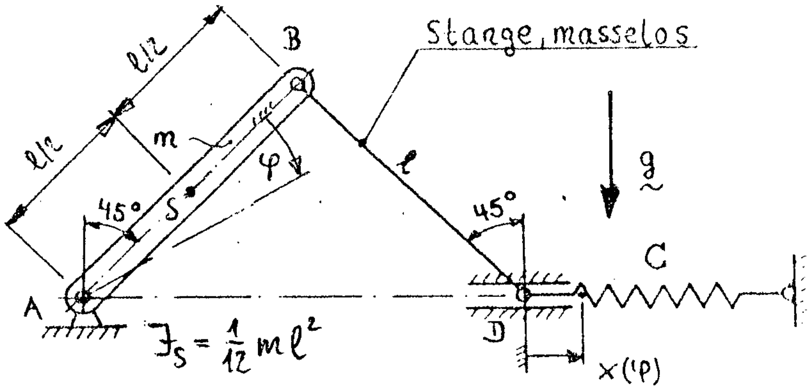
2. Mit dem Energiesatz bestimme man die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$.

Lösung: 1. $y(\varphi) = 2\sqrt{2}\,r\sqrt{1-\cos\varphi}$; $\dot{y} = \sqrt{2}\,r\,\dot{\varphi}\,\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}$.

$$2.\ \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{r^2\left(\frac{2}{3}m_1 + m_2\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right)}\left[m_1 g r \sin\varphi - m_2 g\, 2\sqrt{2}\,r\sqrt{1-\cos\varphi} - \frac{C}{2} r^2 \sin^2\varphi\right]}$$

Aufgabe K-ESD 11 (Abschlussklausur SS 2002)

Ein Stab der Masse m und Drehmasse J_S ist über eine masselose Stange mit einer Feder (Federkonstante C) verbunden. Das System wird aus der Anfangslage $\varphi=x=0$ (Feder hier spannungslos) ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen.



1. Man ermittle den geometrischen Zusammenhang $x(\varphi)$ für den Federweg.

2. Mit dem Energiesatz berechne man die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$.

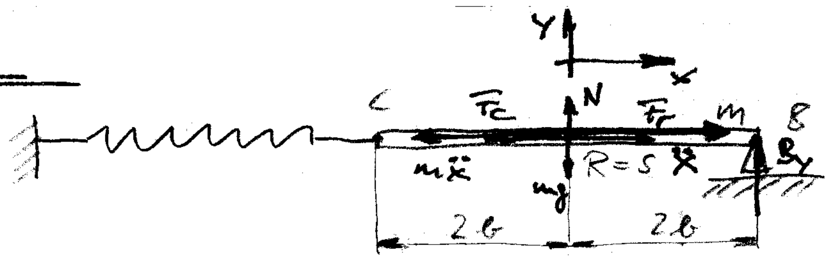
3. Wie groß muss die Federkonstante C gewählt werden, damit das System die Lage $\varphi=45°$ (horizontale Lage) gerade noch erreicht?

Lösung: 1. $x = \ell\left(2\sin(45°+\varphi) - \sqrt{2}\right)$ 3. $C = \dfrac{mg\sqrt{2}}{\ell\cdot 2(2-\sqrt{2})^2} = 2{,}061\,\dfrac{mg}{\ell}$

$$2.\ \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{6}{m\ell^2}\left\{mg\frac{\ell}{4}\sqrt{2} - \frac{C}{2}\ell^2\left[2\sin(45°+\varphi)-\sqrt{2}\right]^2 - mg\frac{\ell}{2}\cos(45°+\varphi)\right\}}$$

K-DAD 1:

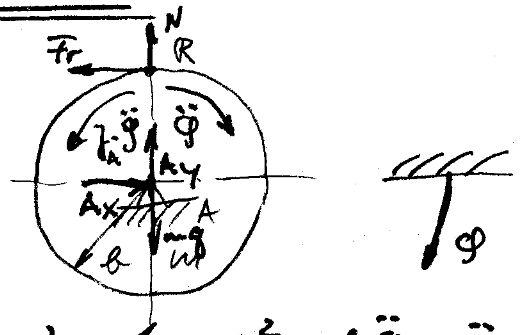
1) „0":



$$\sum F_x = 0 = -m\ddot{x} - F_c + F_r \,;\quad F_c = cx \,;\quad c = \frac{mg}{2b}$$

$$\Rightarrow BGL(0):\quad 0 = -m\ddot{x} - \frac{mg}{2b}x + F_r$$

„1":



$$\sum \overset{\curvearrowleft}{M_A} = 0 = -F_r \cdot b - J\cdot\ddot{\varphi} \,;\quad J = \frac{1}{2}mb^2 \,;\quad b\ddot{\varphi} = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{b}$$

$$\Rightarrow 0 = -F_r\cdot\cancel{b} - \frac{1}{2}m b^{\cancel{2}}\cdot\frac{\ddot{x}}{\cancel{b}}$$

$$\Rightarrow BGL(1):\quad 0 = -F_r - \frac{m\ddot{x}}{2}$$

$$(0):\ F_r = m\ddot{x} + \frac{mg}{2b}x \,;\qquad (1):\ F_r = -\frac{m\ddot{x}}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{m}\ddot{x}}{\cancel{2}} = \overset{2}{\cancel{m}}\ddot{x} + \frac{\cancel{m}g}{\cancel{2}b}x \Rightarrow 0 = 3\ddot{x} + \frac{g}{b}x$$

$$\Rightarrow BGL:\quad 0 = \ddot{x} + \frac{g}{3b}x$$

2) $$\sum \overset{\curvearrowleft}{M_B} = 0 = mg\cdot 2b - N\cdot(2b+x)$$

$$\Rightarrow N = mg\frac{2b}{2b+x} \,;\qquad F_r \le \mu\cdot N \Rightarrow F_r \le \mu mg\frac{2b}{2b+x}$$

RB: Beschleunigungsmaximum im Umkehrpunkt

$$\Rightarrow \ddot{x}(x = x_{max}) = \ddot{x}_{max} \,;\quad F_r > -\frac{m\ddot{x}_{max}}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_{max} < -\frac{2F_r}{m}$$ eingesetzt in BGL:

$$\Rightarrow 0 < -\frac{2\mu\cancel{m}\cancel{g}\cdot 2b}{\cancel{m}(2b+x_{max})}\cdot 3b + \frac{\cancel{g}}{\cancel{3b}}x_{max} = -\frac{12\mu b^2}{2b+x_{max}} + x_{max}$$

$$\Rightarrow 0 < -12b^2\mu + 2bx_{max} + x_{max}^2 = (x_{max}+b)^2 - (12\mu+1)b^2$$

$$\Rightarrow x_{max} + b < \sqrt{12\mu+1}\cdot b$$

$$\Rightarrow x_{max} < b\left(\sqrt{12\mu+1} - 1\right)$$

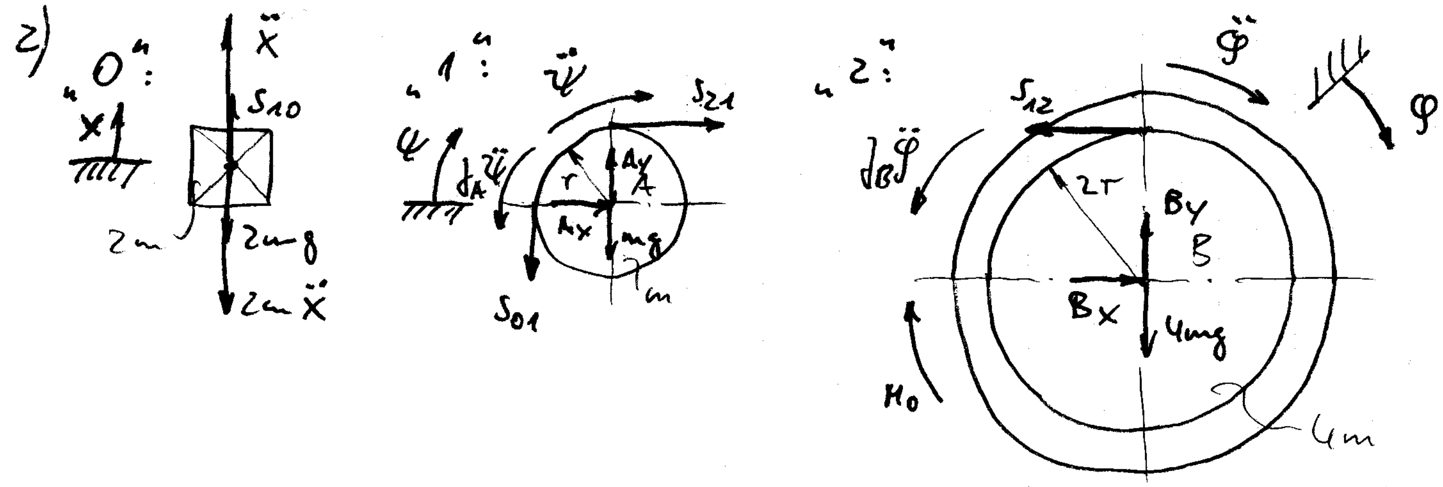
K-DAD 10:

1) $x = 2r\varphi$; $r = const \Rightarrow \underline{\underline{\dot{x} = 2r\dot{\varphi}}}$

$x = r\psi \Rightarrow \dot{x} = r\dot{\psi} \Rightarrow 2r\dot{\varphi} = r\dot{\psi}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}}}$

2)



3) „0": $\sum F_x = 0 = -2m\ddot{x} - 2mg + S_{10}$; $r = const \Rightarrow \ddot{x} = 2r\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow \underline{\underline{BGL(0): 0 = -4mr\ddot{\varphi} - 2mg + S_{10}}}$

„1": $\sum \overset{\curvearrowright}{M_A} = 0 = -S_{01}\cdot r - J_A\ddot{\psi} + S_{21}\cdot r$; $J_A = \frac{m}{2}r^2$; $\ddot{\psi} = 2\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow 0 = -S_{01}\cdot \cancel{r} - mr^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} + S_{21}\cancel{r}$

$\Rightarrow \underline{\underline{BGL(1): 0 = -S_{01} - mr\ddot{\varphi} + S_{21}}}$

„2": $\sum \overset{\curvearrowright}{M_B} = 0 = -J_B\ddot{\varphi} - S_{12}\cdot 2r + M_0$; $J_B = 10mr^2$; $M_0 = 8mgr$

$\Rightarrow 0 = -\cancel{10}^{5}mr^{\cancel{2}}\ddot{\varphi} - \cancel{2}S_{12}\cancel{r} + \cancel{8}^{4}mg\cancel{r}$

$\Rightarrow \underline{\underline{BGL(2): 0 = -5mr\ddot{\varphi} - S_{12} + 4mg}}$

$S_{10} = S_{01}$

(0): $S_{10} = 4mr\ddot{\varphi} + 2mg$; (1): $S_{01} = -mr\ddot{\varphi} + S_{21}$

$\Rightarrow 4mr\ddot{\varphi} + 2mg = -mr\ddot{\varphi} + S_{21}$

$\Rightarrow S_{21} = 5mr\ddot{\varphi} + 2mg$

$S_{21} = S_{12}$

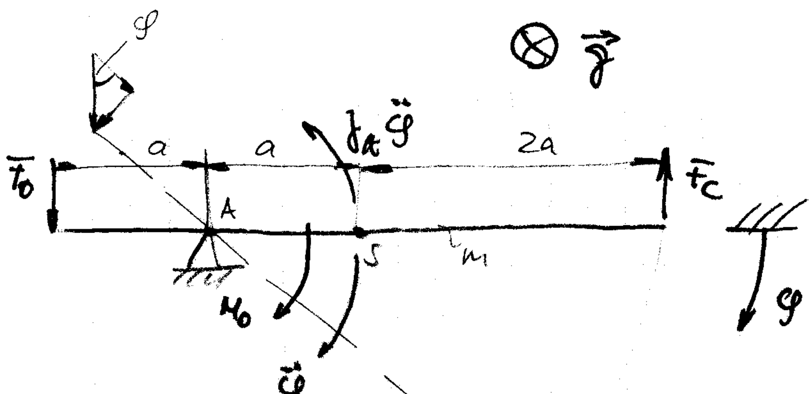
(2): $S_{12} = -5mr\ddot{\varphi} + 4mg$

$\Rightarrow -5\cancel{m}r\ddot{\varphi} + 4\cancel{m}g = 5\cancel{m}r\ddot{\varphi} + 2\cancel{m}g$

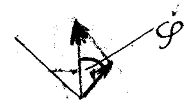
$\Rightarrow 2g = 10r\ddot{\varphi}$

$\Rightarrow \underline{\underline{BGL: \ddot{\varphi} = \frac{g}{5r}}}$

K-ASD 2



1) $T = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2$; $J_A = J_S + m a^2$



$J_S = \frac{4}{3} m a^2$

$\Rightarrow T = \frac{7}{6} m a^2 \dot{\varphi}^2$

2) $W = T_1 - T_0$; $W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M \, d\varphi$; $M = -M_T$; $\varphi_0 = 0$

$T_0 = 0 \Rightarrow W = T_1$

$\sum \widehat{M_A} = 0 = -F_0 \cos\varphi \cdot a + M_0 + M_T - F_C \cdot 3a\cos\varphi$; $F_C = C \cdot 3a \sin\varphi$

$\Rightarrow -M_T = -F_0 a \cos\varphi + M_0 - 9Ca^2 \cos\varphi \sin\varphi$; $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$

$\Rightarrow M = -F_0 a \cos\varphi + M_0 - \frac{9}{2} C a^2 \sin 2\varphi$

$\Rightarrow W = \int_0^{\varphi} \left[-F_0 a \cos\tilde{\varphi} + M_0 - \frac{9}{2} C a^2 \sin 2\tilde{\varphi} \right] d\tilde{\varphi}$

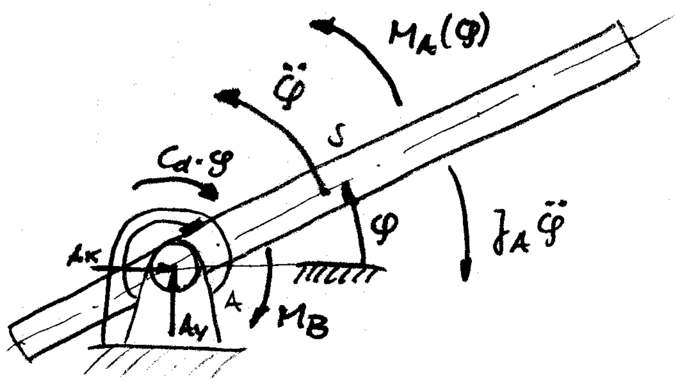
$= -F_0 a \sin\varphi + M_0 \varphi + \frac{9}{4} C a^2 \cos 2\varphi - \frac{9}{4} C a^2$

$\Rightarrow \frac{7}{6} m a^2 \dot{\varphi}^2 = -F_0 a \sin\varphi + M_0 \varphi + \frac{9}{4} C a^2 (\cos 2\varphi - 1)$;

$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos 2\varphi - 1) = -\sin^2\varphi$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{6}{7}\left[\frac{M_0}{m a^2}\varphi - \left(F_0 + \frac{9}{2} C a \sin\varphi\right)\frac{\sin\varphi}{m a}\right]}$$

K - ASD 1:



$\otimes \vec{\varphi}$

1) $\sum M_A = 0 = M_A(\varphi) - M_B - J_A \ddot{\varphi} - c_d \cdot \varphi$

$$\Rightarrow 0 = M_0(1 + \sin\varphi) - M_B - J_A \ddot{\varphi} - c_d \cdot \varphi$$

$$M_T = -J_A \ddot{\varphi} \;; \quad M(\varphi) + M_T = 0 \Rightarrow M(\varphi) = -M_T = J_A \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow 0 = M_0(1 + \sin\varphi) - M_B - M(\varphi) - c_d \cdot \varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M(\varphi) = M_0(1 + \sin\varphi) - M_B - c_d \cdot \varphi}}$$

AS: $W = T - T_0 \;; \quad \dot{\varphi}(\varphi = 0) = 0 \Rightarrow T_0 = 0$

$$\Rightarrow W = T \;;$$

$$T = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2 \;; \quad J_A = J_S + m r^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{16} = \frac{7}{48} m l^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{7}{96} m l^2 \dot{\varphi}^2}}$$

$$W = \int_0^{\varphi} M(\tilde{\varphi})\, d\tilde{\varphi} = \int_0^{\varphi} \left[M_0(1 + \sin\tilde{\varphi}) - M_B - c_d \cdot \tilde{\varphi} \right] d\tilde{\varphi}$$

$$= \left[M_0(\tilde{\varphi} - \cos\tilde{\varphi}) - M_B \tilde{\varphi} - \frac{1}{2} c_d \tilde{\varphi}^2 \right]_0^{\varphi} \;; \quad \cos 0 = 1 \,!$$

$$= M_0(\varphi - \cos\varphi) - M_B \varphi - \frac{1}{2} c_d \varphi^2 + M_0$$

$$\Rightarrow \frac{7}{96} m l^2 \dot{\varphi}^2 = M_0(1 - \cos\varphi + \varphi) - M_B \varphi - \frac{1}{2} c_d \varphi^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{96}{7 m l^2} \left(M_0(1 - \cos\varphi + \varphi) - M_B \varphi - \frac{1}{2} c_d \varphi^2 \right)}}}$$

oder nach d'Alembert:

$$0 = M_0(1+\sin\varphi) - M_B - J_A\ddot{\varphi} - c_d\cdot\varphi\,;$$

$$J_A = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{16} = \underline{\underline{\frac{7}{48}ml^2}}$$

$$\Rightarrow BGL: \quad \underline{\underline{0 = M_0(1+\sin\varphi) - M_B - \frac{7}{48}ml^2\ddot{\varphi} - c_d\cdot\varphi}}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow M_0(1+\sin\varphi) - M_B - c_d\cdot\varphi = \frac{7}{48}ml^2\dot{\varphi}\cdot\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \int\left[M_0(1+\sin\varphi) - M_B - c_d\cdot\varphi\right]d\varphi = \int\frac{7}{48}ml^2\dot{\varphi}\cdot d\dot{\varphi}$$

$$= M_0(\varphi - \cos\varphi) - M_B\varphi - \frac{1}{2}c_d\varphi^2 = \frac{7}{96}ml^2\dot{\varphi}^2 + C$$

$$AB: \dot{\varphi}(\varphi = 0) = 0 \overset{\cos 0 = 1}{\Longrightarrow} -M_0 = 0 + C \Rightarrow \underline{C = -M_0}$$

$$\Rightarrow M_0(\varphi - \cos\varphi) - M_B\varphi - \frac{1}{2}c_d\varphi^2 = \frac{7}{96}ml^2\dot{\varphi}^2 - M_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{96}{7ml^2}\left(M_0(1-\cos\varphi+\varphi) - M_B\varphi - \frac{1}{2}c_d\varphi^2\right)}}}$$

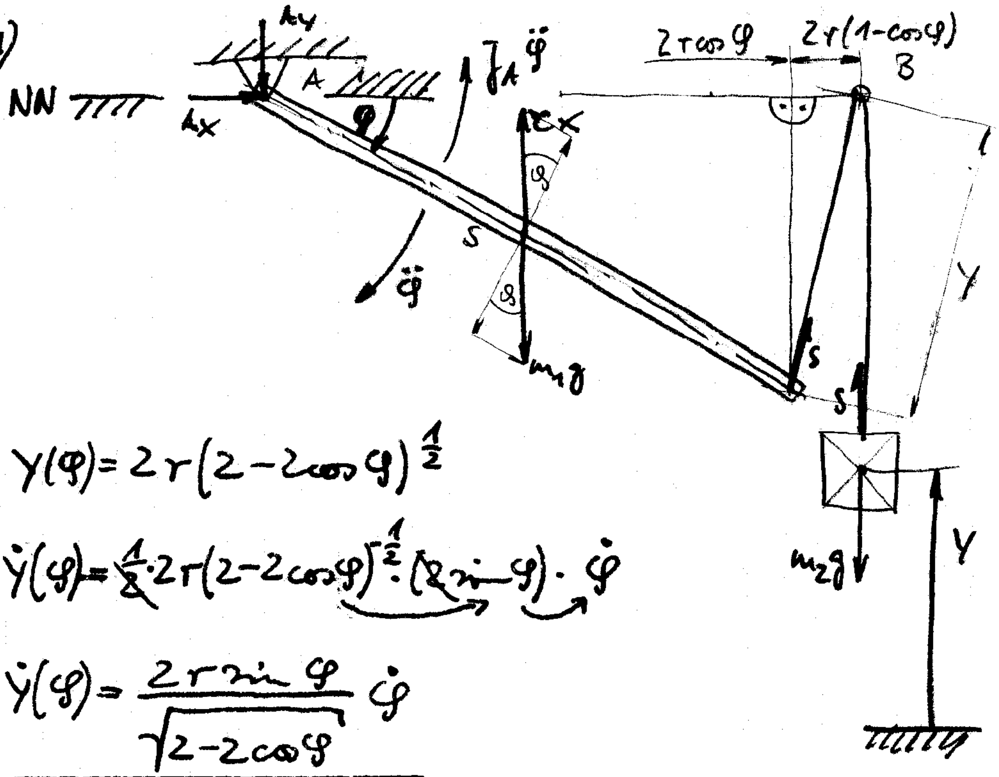
2) $$\dot{\varphi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \omega_1 = \sqrt{\frac{96}{7ml^2}\left(M_0\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right) - M_B\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}c_d\frac{\pi^2}{9}\right)}$$

$$\frac{\pi^2}{18}c_d = M_0\frac{3+2\pi}{6} - M_B\frac{\pi}{3} - \omega_1^2\frac{7ml^2}{96}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c_d = M_0\frac{9+6\pi}{\pi^2} - M_B\frac{6}{\pi} - \omega_1^2\frac{21ml^2}{16\pi}}}$$

K - ESD5:

1)



$$y = 2r\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$y = 2r\sqrt{1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}}$$

$$y(\varphi) = 2r\sqrt{2-2\cos\varphi}$$

$$y(\varphi) = 2r(2-2\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{y}(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot 2r(2-2\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\sin\varphi)\cdot\dot{\varphi}$$

$$\dot{y}(\varphi) = \frac{2r\sin\varphi}{\sqrt{2-2\cos\varphi}}\,\dot{\varphi}$$

2) AS: $T_0 + V_0 = T + V$

$$V = m_1\cdot g h_1 + m_2\cdot g\cdot h_2 + \frac{1}{2}c\cdot x^2;$$

$$h_1 = -r\sin\varphi;\quad h_2 = y(\varphi) = 2r\sqrt{2-2\cos\varphi};\quad x = r\sin\varphi$$

$$\Rightarrow V(\varphi) = 2m_2 g r\sqrt{2-2\cos\varphi} - m_1 g r\sin\varphi + \frac{1}{2}c r^2\sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow V_0 = V(\varphi=0) = 0$$

$$T(\varphi) = \frac{m_2}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2;\quad J_A = \frac{1}{\cancel{12}\,3}m_1\cancel{4}r^2 + m_1 r^2 = \frac{4}{3}m_1 r^2$$

$$\Rightarrow T(\varphi) = \frac{1}{2}m_2\cdot\frac{4r^2\sin^2\varphi}{2-2\cos\varphi}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}m_1 r^2\right)\dot{\varphi}^2$$

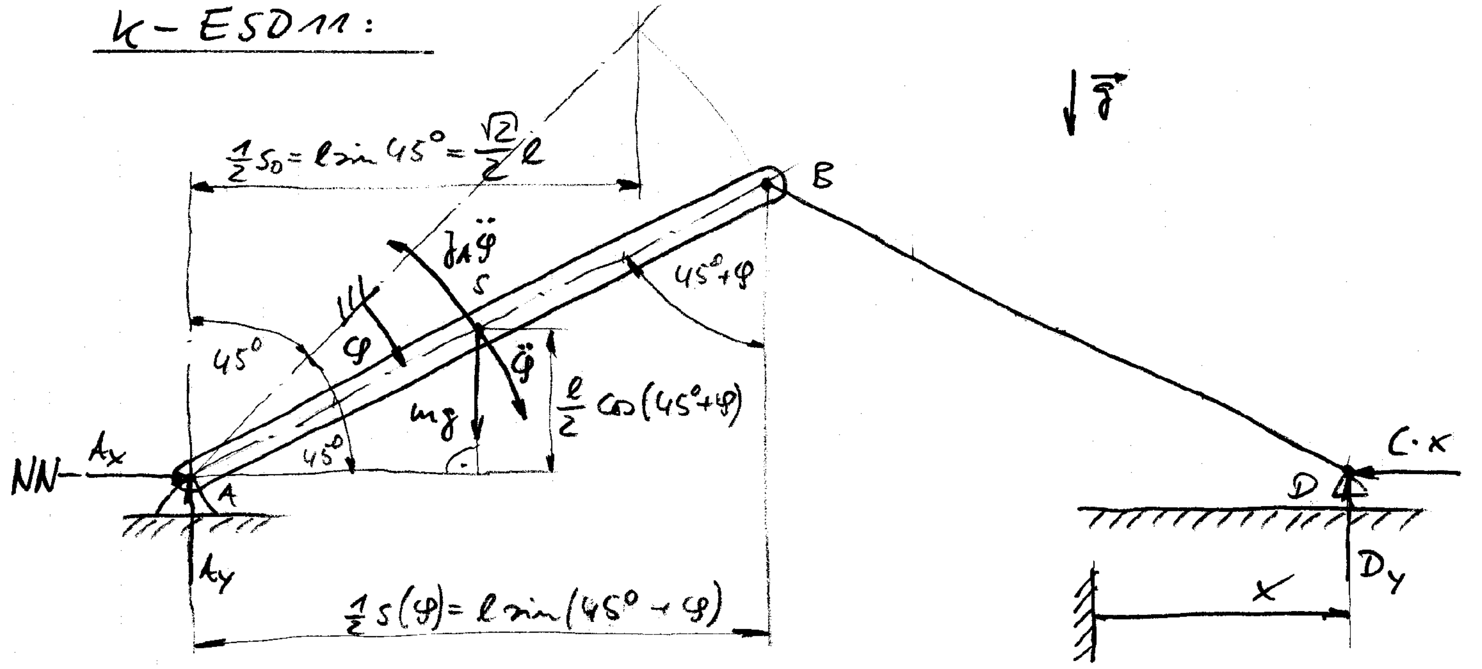
$$T(\varphi) = \left(\frac{2}{3}m_1 + m_2\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right)r^2\dot{\varphi}^2$$

AB: $T_0 = T(\varphi=0, \dot{\varphi}=0) = 0 \Rightarrow 0 = V(\varphi) + T(\varphi)$

$$\Rightarrow 0 = 2m_2\frac{g}{r}\cancel{r}\sqrt{2-2\cos\varphi} - m_1\frac{g}{r}\cancel{r}\sin\varphi + \frac{1}{2}c\cancel{r^2}\sin^2\varphi + \left(\frac{2}{3}m_1 + m_2\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right)\cancel{r^2}\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{m_1\frac{g}{r}\sin\varphi - 2m_2\frac{g}{r}\sqrt{2-2\cos\varphi} - \frac{1}{2}c\sin^2\varphi}{\frac{2}{3}m_1 + m_2\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}}}$$

K – ESD11:



1) $s_0 = \sqrt{2}\,l\,;\quad x = s(\varphi) - s_0$

$\Rightarrow x = 2l\sin(45°+\varphi) - \sqrt{2}\,l\quad;\quad \sin(45°+\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{2}\,l(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)}}$

2) ES: $\underline{V_0 + T_0 = V(\varphi) + T(\varphi)}$

$V(\varphi) = mgh + \frac{1}{2}cx^2;$

$h = \frac{l}{2}\cos(45°+\varphi)\quad;\quad \cos(45°+\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)$

$\Rightarrow \underline{\underline{V(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{4}mgl(\cos\varphi - \sin\varphi) + cl^2(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)^2}}$

$\Rightarrow V_0 = V(\varphi = 0) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}mgl}}$

$T(\varphi) = \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2\;;\quad J_A = J_S + mr^2;\quad r = \frac{l}{2}\;;\quad J_S = \frac{1}{12}ml^2$

$\Rightarrow J_A = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(\varphi) = \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2}}$

AB: $\dot{\varphi}(\varphi = 0) = 0 \Rightarrow T_0 = T(\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0) \underline{\underline{= 0}}$

$$\Rightarrow V_0 = V(\varphi) + T(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{2}}{4\ell}\cancel{m}g\cancel{\ell} = \frac{6\sqrt{2}}{4\ell}\cancel{m}g\cancel{\ell}(\cos\varphi - \sin\varphi) + 6\frac{c}{m}\cancel{\ell^2}(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)^2 + \frac{1}{\cancel{9}}\cancel{m}\cancel{\ell^2}\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{3\cancel{6}\sqrt{2}}{2\cancel{4}\ell}g\left(1 - (\cos\varphi - \sin\varphi)\right) - \frac{6c}{m}(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)^2$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2\ell}(1 - \cos\varphi + \sin\varphi) - \frac{6c}{m}(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)^2}$$

3) $\dot{\varphi}(\varphi = 45°) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2\ell}\left(1 - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) - \frac{6c}{m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2}$$

$$0 = \frac{3\sqrt{2}g}{2\ell} - \frac{6c}{m}(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\frac{\cancel{6}c}{m}(\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{\cancel{3}\sqrt{2}g}{4\cancel{2}\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{\sqrt{2}g}{4(\sqrt{2}-1)^2\ell}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}mg}{(2\sqrt{2} - 2)^2\ell} = 2{,}061\frac{mg}{\ell}$$