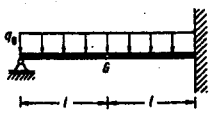
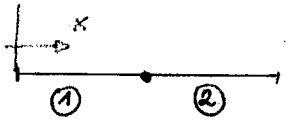
18. Man bestimme die Biegelinie für den dargestellten balken (Biegesteifigkeit EI).





$$-Q_1 = qx + C_1$$
$$-M_1 = q\frac{x^2}{2} + C_1 x + \cancel{C_2}$$
$$EI w_1' = q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + \cancel{C_2 x} + C_3$$
$$EI w_1 = q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + \cancel{C_2\frac{x^2}{2}} + C_3 x + \cancel{C_4}$$

$$-Q_2 = qx + C_5$$
$$-M_2 = q\frac{x^2}{2} + C_5 x + \cancel{C_6}$$
$$EI w_2' = q\frac{x^3}{6} + C_5\frac{x^2}{2} + \cancel{C_6 x} + C_7$$
$$EI w_2 = q\frac{x^4}{24} + C_5\frac{x^3}{6} + \cancel{C_6\frac{x^2}{2}} + C_7 + C_8$$

RB + ÜB:
1) $M_1(0) = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$
2) $w_1(0) = 0 \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$

3) $M_1(l) = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = -\frac{ql}{2}}$

4) $Q_1(l) = Q_2(l) \Rightarrow ql - \frac{ql}{2} = ql + C_5 \rightarrow \underline{C_5 = -\frac{ql}{2}}$

5) $M_2(l) = 0 = \frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} + C_6 \rightarrow \underline{C_6 = 0}$

6) $EI w_2'(2l) = 0 = \frac{q}{3}\cdot 8 l^3 - \frac{q}{2} l \cdot 4l^2 + C_7 \Rightarrow \underline{C_7 = -\frac{ql^3}{3}}$

7) $EI w_2(2l) = 0 = \frac{q}{24}\cdot 16 l^4 - \frac{ql^2 \cdot 8 l^3}{2\cdot 6} - \frac{ql^3}{3}\cdot 2l + C_8 \Rightarrow \underline{C_8 = +\frac{2}{3} ql^4}$

8) $EI w_1(l) = EI w_2(l) \rightarrow \cancel{\frac{ql^4}{24}} - \cancel{\frac{ql}{2}\cdot\frac{l^3}{3}} + C_3 l = \cancel{\frac{ql^4}{24}} - \cancel{\frac{ql}{2}\cdot\frac{l^3}{6}} - \underbrace{\frac{ql^3}{3}\cdot l + \frac{2}{3} ql^4}_{+\frac{1}{3} ql^4}$

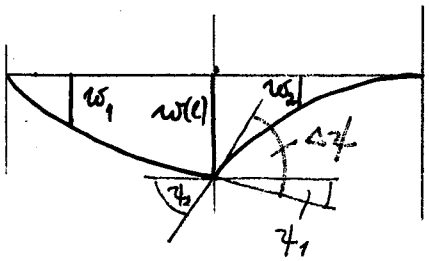
$$\Rightarrow \underline{C_3 = +\frac{ql^3}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{EI w_1}{ql^4} = \frac{1}{24}\xi^4 - \frac{1}{12}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi \qquad \text{mit } \xi = \frac{x}{l}$$

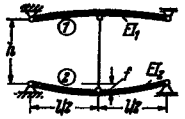
$$\frac{EI w_2}{ql^4} = \frac{1}{24}\xi^4 - \frac{1}{12}\xi^3 - \frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}$$

$$\frac{EI w_1'}{ql^3} = \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{EI w_2'}{ql^3} = \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{3}$$

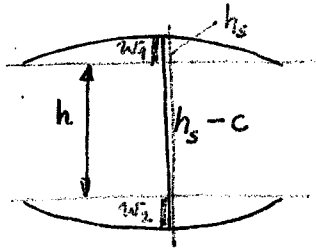


19.



Zwei parallele, gelenkig gelagerte Balken (Biegesteifigkeiten EI_1, EI_2) haben ursprünglich den Abstand h. Es wird ein elastischer Stab der Länge $h_s = h + \Delta h$ ($\Delta h \ll h$, Dehnsteifigkeit EA) zwischen sie gezwängt.

a) Wie groß ist die Spannung im Stab?
b) Wie weit biegt sich der Balken 2 durch?



c = Stabzusammendrückung

$$w_1 = \frac{Sl^3}{48EI_1} = S\delta_1$$
$$w_2 = \frac{Sl^3}{48EI_2} = S\delta_2$$
$$c = \frac{S(h+\Delta h)}{EA} = S\delta_3 \approx \frac{Sh}{EA} \;!$$

δ_i Nachgiebigkeit

Geometrie:
$$\overbrace{h + \Delta h}^{h_s} - c - w_1 - w_2 = h$$
$$\Delta h - c - w_1 - w_2 = 0$$
$$c + w_1 + w_2 = \Delta h \qquad (c \text{ ist negativ})$$

$$S(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = \Delta h$$
$$S = \frac{\Delta h}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3} \qquad |\sigma| = \frac{\Delta h}{A(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)} \quad \text{(Druck im Stab)}$$

$$f = w_2 = \Delta h \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}$$

$$\sigma = \frac{\Delta h}{A}\cdot\frac{1}{\frac{l^3}{48EI_1} + \frac{l^3}{48EI_2} + \frac{h}{EA}} = \frac{\Delta h}{h}\cdot\frac{EA}{\frac{l^3 EA}{48EI_1 h} + \frac{l^3 EA}{48EI_2 h} + 1} \;\checkmark$$

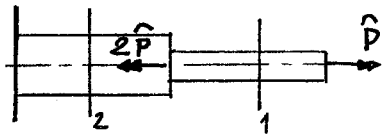
21.

1. Eine abgesetzte Welle (Vollkreisquerschnitte mit den Radien r und $\frac{1}{2}r$, Schubmodul G) wird durch die Torsionsmomente $\hat{P}$ und $2\hat{P}$ beansprucht.

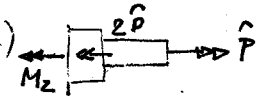
a) Wie groß darf $\hat{P}$ höchstens sein ($\hat{P}_{max}$) wenn die zulässige Schubspannung τ_{zul} nicht überschritten werden soll?

b) Wie groß ist für diese Maximalbelastung die Verdrehung ϑ_0 des Endquerschnitts?

a)



Schnitt 1): $M_1 = \hat{P}$



" 2): $M_2 = -\hat{P}$

betragsm. gleich → größte Beanspr. in Teil ①

$$W_t = \frac{\pi r^3}{2} \qquad \tau = \frac{\hat{P}}{W_t} \quad \rightarrow \quad \hat{P}_{max} = W_t \cdot \tau_{zul}$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{P}_{max} = \frac{\pi r^3}{2}\tau_{zul}}$$

b)
$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot L}{G I_{t1}} = \frac{\pi r^3 \tau_{zul} \cdot L \cdot 2}{2 \cdot G \cdot \pi \cdot r^4} = \underline{\underline{\frac{L}{r} \cdot \frac{\tau_{zul}}{G}}}$$

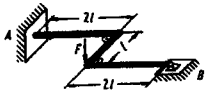
$$I_{t1} = \frac{\pi}{2} r^4 \qquad I_{t2} = \frac{81}{32}\pi r^4$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 L}{G I_{t2}} = -\frac{\pi r^3 \tau_{zul} L \cdot 32}{2 \cdot G \cdot 81 \pi r^4} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{L}{r}\frac{\tau_{zul}}{G}}}$$

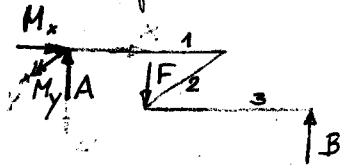
$$\boxed{\varphi_{ges} = \varphi_1 + \varphi_2 = \left(1 - \frac{16}{81}\right)\frac{L}{r}\frac{\tau_{zul}}{G} = \underline{\underline{\frac{65}{81}\frac{l}{r}\frac{\tau_{zul}}{G}}}}$$

22.

Ein horizontaler Rahmen aus Stahl ($E/G \approx 8/3$) besteht aus drei rechtwinklig miteinander verbundenen Balken mit Kreisquerschnitt (Radius r). Er ist im unbelasteten Zustand spannungsfrei. Wie groß sind die Lagerreaktionen, wenn der Rahmen durch eine vertikale Kraft F belastet wird?



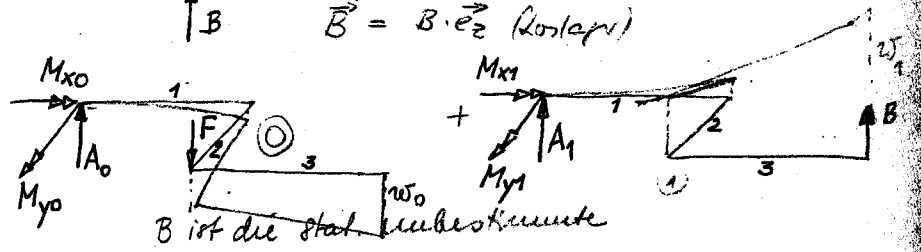
einfach stat. unbestimmt:



alle anderen Komponenten der Lagerreakt. = 0

$A_x = 0 \quad A_y = 0 \quad M_{zA} = 0$

$\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ (Lager)



B ist die stat. unbestimmte

Geometrie: $w_{B0} + w_{B1} = 0$

0: $w_1,\ w_2,\ \varphi_1 \cdot l,\ w_4' \cdot 2l$

$$w_1 = \frac{F(2l)^3}{3EI} = \frac{8}{3}\frac{Fl^3}{EI} \qquad w_2 = \frac{Fl^3}{3EI} \qquad w_4' = \frac{4Fl^2}{2EI} \qquad \varphi_1 = \frac{\overbrace{Fl \cdot 2l}^{M_{t1}}}{G I_t}$$

$$\rightarrow w_{B0} = \frac{8}{3}\frac{Fl^3}{EI} + \frac{Fl^3}{3EI} + \underbrace{\frac{2Fl^3}{G I_t}}_{\frac{2Fl^3 \cdot 8}{3E \cdot 2I}} + \frac{8Fl^3}{2EI} = \frac{29}{3}\frac{Fl^3}{EI}$$

1: $w_1 + w_3,\ w_2,\ \varphi_1 \cdot l,\ \varphi_2 \cdot 2l$

$$w_1 + w_3 = \frac{F \cdot (4l)^3}{3EI} = \frac{64}{3}\frac{Bl^3}{EI}, \quad w_2 = \frac{Bl^3}{3EI}, \quad \varphi_1 = \frac{\overbrace{B \cdot l \cdot 2l}^{M_1}}{G I_t}, \quad \varphi_2 = \frac{\overbrace{B \cdot 2l \cdot l}^{M_2}}{G I_t}$$

$$-w_{B1} = \frac{64}{3}\frac{Bl^3}{EI} + \frac{Bl^3}{3EI} + \frac{2Bl^3 \cdot 8}{3 \cdot 2EI} + \frac{2 \cdot 2Bl^3 \cdot 8}{3 \cdot 2EI} = \frac{89}{3}\frac{Bl^3}{EI}$$

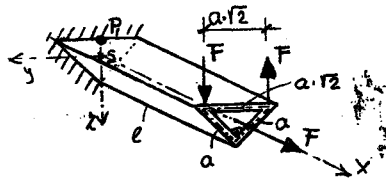
$$\Rightarrow \frac{29}{3}\frac{Fl^3}{EI} - \frac{89}{3}\frac{Bl^3}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{29}{89}F}$$

Lagerreakt.: $M_x = -\left(1 - \frac{29}{89}\right) lF = -60/89\ l \cdot F$

$M_y = +2lF - 4l \cdot \frac{29}{89}F = +62/89\ l \cdot F$

$A = F - \frac{29}{89}F = 60/89\ F$

24.



Der einseitig eingespannte Träger der Länge l besteht aus einem dünnwandigen Hohlquerschnitt der Wandstärke t mit (t<a). Mit den Größen lt. Skizze sind zu errechnen:

a) Spannungen σ und τ in P.
b) Verdrehwinkel φ des Trägers.
c) Vergleichsspannung in P nach der Gestaltänderungsenergiehypothese.

$$T = \sqrt{2}\, a F$$

$$I_t = \frac{(2A_m)^2}{U/t} \qquad A_m = a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$U = 2a + \sqrt{2}\, a = (2+\sqrt{2})\, a$$

$$W_t = 2A_m t = a^2 t$$

$$I_t = \frac{a^3 t}{2+\sqrt{2}} \qquad A_z = U \cdot t = (2+\sqrt{2})\, a t$$

a) Keine Biegung, da F durch S geht →

$$\sigma = \sigma_{zug} = \frac{F}{(2+\sqrt{2})\, a t} \qquad \tau = \frac{T}{W_t} = \frac{\sqrt{2}\, a F}{a^2 t} = \frac{\sqrt{2}\, F}{a t}$$

b) $$\varphi = \frac{\sqrt{2}\, a F \cdot l}{G\, a^3 t}(2+\sqrt{2}) = \frac{F l}{G a^2 t}(2\sqrt{2}+2)$$

c) $$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{F}{at}\sqrt{\frac{1}{(2+\sqrt{2})^2} + 3 \cdot 2}$$

$$= \frac{F}{at}\sqrt{\frac{1}{(2+\sqrt{2})^2} + 6}$$

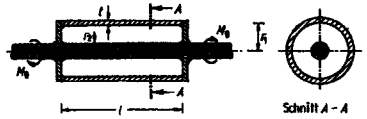
Zahlenwerte:

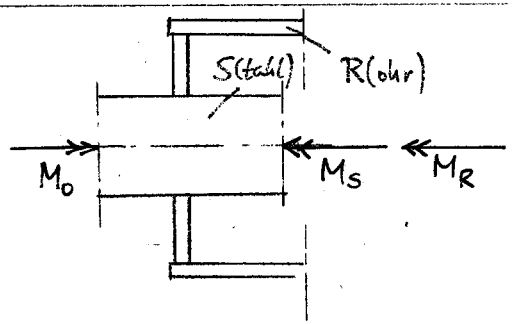
$$\sigma = 0{,}293 \frac{F}{at} \qquad \tau = 1{,}414 \frac{F}{at} \qquad \varphi = 4{,}828 \frac{Fl}{G a^2 t}$$

$$\sigma_V = 2{,}467 \frac{F}{at}$$

23.

Ein dünnwandiges Aluminiumrohr (mittlerer Radius $r_1 = 2r$, Wandstärke $t = r/8$, Schubmodul G_1) und ein Stahlstab (Radius $r_2 = r$, Schubmodul $G_2 = 3G_1$) werden durch zwei starre Endplatten miteinander verbunden. Welcher Anteil des eingeleiteten Torsionsmoments M_0 wird vom Aluminiumrohr getragen? Wie groß darf M_0 höchstens sein, damit die zulässige Schubspannung τ_{zul} im Aluminiumrohr nicht überschritten wird?





Geometrie:

$$I_{t,R} = \frac{(2A_m)^2}{\frac{U}{t}} = \frac{(2\cdot(2r)^2\pi)^2}{\frac{4\pi r}{r/8}} = \frac{64\pi^2 r^4}{\frac{4\pi r \cdot 8}{r}} = 2\pi r^4$$

$$W_{t,R} = 2\pi \cdot (2r)^2 \cdot t = 2\pi \cdot 4r^2 \cdot r/8 = \pi r^3 \qquad I_S = \frac{\pi r^4}{2}$$

Stab/2: $M_R + M_S = M_0$

Verformung: $$\varphi_S = \frac{M_S L}{G_2 I_S} = \frac{M_S \cdot L \cdot 2}{3 G_1 \cdot \pi r^4}$$

$$\varphi_R = \frac{M_R \cdot L}{G_1 \cdot I_R} = \frac{M_R \cdot L}{G_1 \cdot 2\pi r^4}$$

Geomet., starre Scheibe →

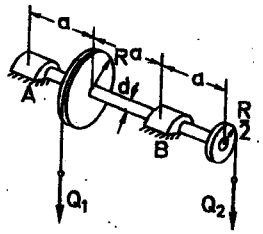
$$\varphi_R = \varphi_S$$

$$\frac{M_S L \cdot 2}{3 G_1 \pi r^4} = \frac{M_R \cdot L}{G_1 \cdot 2\pi r^4} \Rightarrow M_R = \frac{4}{3} M_S$$

einsetzen: $\frac{4}{3} M_S + M_S = M_0 \rightarrow M_S = \frac{3}{7} M_0 \rightarrow M_R = \frac{4}{7} M_0$

$$\tau_{zul} = \frac{M_{R,max}}{W_{t,R}} = \frac{4 M_{0,max}}{7\pi r^3} \Rightarrow M_{0,max} = \frac{7\pi}{4} r^3 \tau_{zul}$$

31.



Eine kreisrunde Welle aus Stahl (Durchmesser d, Länge 3a) wird durch zwei Lager A und B gestützt (gelenkige Lagerung, keine Einspannung). An zwei fest auf der Welle sitzenden Scheiben (Radien R und R/2) hängen die Gewichte Q_1 und Q_2. Gegeben: a = 2,0 m; R = 0,25 m; d = 0,10 m; $Q_1 = 10^4$ N; $G = 7{,}9 \cdot 10^4$ N/mm². Man berechne:

a) die Größe von Q_2, damit Gleichgewicht herrscht.

b) die maximale Normalspannung infolge Biegung.

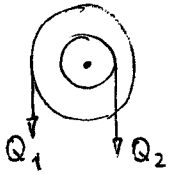
c) die maximale Schubspannung infolge Torsion.

d) den Verlauf des Verdrehwinkels.

Ergebnis: b) $\sigma_{max} = 407.4$ N/mm²; c) $\tau_{max} = 12.7$ N/mm²; d) $\varphi_{max} = 0.0131$

---

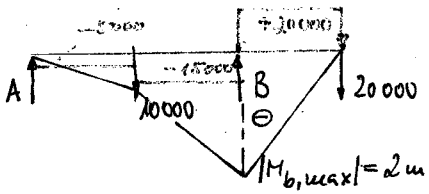
a)



$$Q_2 \frac{R}{2} - Q_1 R = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Q_2} = Q_1 \cdot 2 = \underline{20000\,N}$$

b)



$$\circlearrowleft A: \; a \cdot 10^4 + 3a \cdot 2 \cdot 10^4 = B \cdot 2a$$

$$B = \frac{7}{2} \cdot 10^4 = 35000$$

$$|M_{b,max}| = 2\,m \cdot 20\,000 = 40\,000\ Nm$$

$$W_b = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 10^{-3} m^3}{32} = \frac{\pi\, 10^6}{32}\ mm^3 \rightarrow \underline{\sigma_b} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 32}{\pi \cdot 10^6} = \underline{\underline{407{,}4\ \frac{N}{mm^2}}}$$

---

c) M_t zwischen den Scheiben konstant: $Q_1 \cdot R = 10000 \cdot 0{,}25 = 2500$ Nm

$$W_t = \frac{\pi\, 10^6}{16}\ mm^3 \rightarrow \underline{\underline{\tau_t}} = \frac{2500 \cdot 1000 \cdot 16}{\pi \cdot 10^6} = \underline{\underline{12{,}7\ N/mm^2}}$$

---

d) $$\varphi_{max} = \frac{M_t \cdot (2a)}{G \cdot I_t} \qquad I_t = \frac{\pi \cdot 10^8}{32}\ mm^4;\ G = 7{,}9 \cdot 10^4\ N/mm^2$$

$$\underline{\underline{\varphi_{max}}} = \frac{2500000 \cdot 2 \cdot 2000 \cdot 32}{79000 \cdot \pi \cdot 10^8} = \underline{\underline{0{,}0129}}$$

Verlauf kontinuierlich.

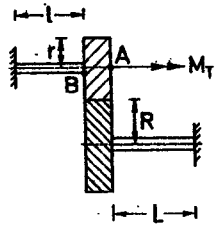
32.

Auf den zwei abgebildeten Wellen (Gleitmodul G) gleichen Durchmessers d sind starre Zahnräder angebracht, die sich im Eingriff befinden. In A wirkt ein äußeres Torsionsmoment M_T. In unbelastetem Zustand sind alle Schnittgrößen gleich Null. Gegeben: l, L, d, r, R, G, M_T. Bestimme:

a) die maximal auftretende Schubspannung.

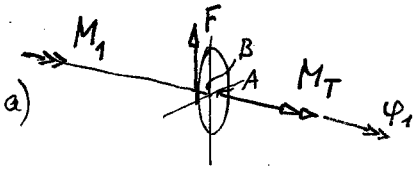
b) die Verdrehung in Punkt B.

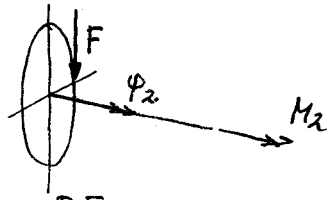
Ergebnis: a) $\tau_{max} = \frac{16 M_T}{\pi d^3 \left[1 + \frac{1}{[\frac{r}{R}]^2}\right]}$; b) $\Delta\varphi = \frac{M_T\, l}{G I_T \left[1 + \frac{1}{[\frac{r}{R}]^2}\right]}$



---

a)





Gleichgewicht:

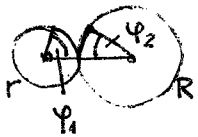
$$M_1 + M_T - rF = 0$$

$$M_1 = rF - M_T$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{(rF - M_T)\, l}{GI}$$

$$M_2 = RF \qquad \varphi_2 = \frac{RLF}{GI}$$

geom. Verträglichkeit:



$$-r\varphi_1 = R\varphi_2$$

einsetzen; GI rauskürzen: $R^2 FL = -(rF - M_T)\, l$

$$\Rightarrow F = M_T \frac{rl}{R^2 L + r^2 l}$$

$$\Rightarrow M_1 = M_T \left[\frac{r^2 l}{R^2 L + r^2 l} - 1\right] = M_T \frac{r^2 l - R^2 L - r^2 l}{R^2 L + r^2 l} = M_T \frac{-R^2 L}{R^2 L + r^2 l}$$

$$M_2 = M_T \frac{Rrl}{R^2 L + r^2 l} \qquad |M_1| = \frac{R}{r} |M_2| \text{ also } > M_2$$

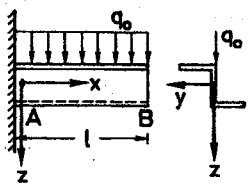
$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau_{max} = \frac{16 M_T}{\pi d^3} \cdot \frac{R^2 L}{R^2 L + r^2 l}}}$$

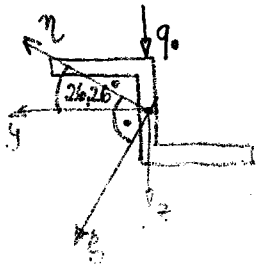
b) φ_1 = Verdrehung bei B: $$\underline{\underline{\varphi_1}} = \frac{M_1 l}{GI_t} = \underline{\underline{-\frac{M_T\, l L R^2}{GI(R^2 L + r^2 l)}}}$$

33. Der skizzierte Kragträger wird durch eine Gleichstreckenlast belastet.

Gegeben: $I_y = 222\ cm^4$; $I_z = 72{,}5\ cm^4$; $I_{yz} = 97{,}5\ cm^4$; $l = 1\ m$;
$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ N/mm^2$; $q_0 = 1\,000\ N/m$. Man bestimme die vertikale und horizontale Verschiebung am freien Ende des Trägers.

Ergebnis: $v_B = 0{,}88\ mm$; $w_B = 0{,}65\ cm$ ← f.





Lage des HAS:

$$\tan(2\varphi_0) = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-2\cdot 97{,}5}{222 - 72{,}5}$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_{02} = -26{,}26^\circ} \qquad \underline{\varphi_{01} = 90^\circ - \varphi_{02} = 63{,}74^\circ}$$

Belastung im η-ζ-System:

$$q_{0\zeta} = q_0 \cdot \cos 26{,}26^\circ \qquad q_{0\eta} = -q_0 \sin 26{,}26^\circ$$

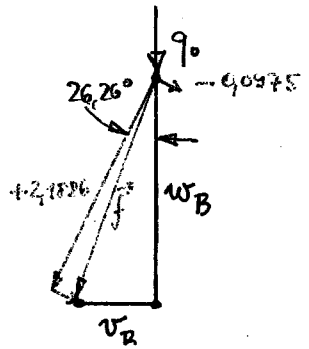
Biegelinie Standardfall: $w = \frac{ql^4}{8EJ}$

$$\Rightarrow w_\eta = \frac{-q_0 \sin|\varphi_{02}| \cdot l^4}{8E\underbrace{I_{\zeta\zeta}}_{I_1}} \qquad w_\zeta = \frac{q_0 \cos|\varphi_{02}|\, l^4}{8E\underbrace{I_{\eta\eta}}_{I_2}}$$

Haupt-FTM: $I_{1,2} = \frac{222 + 72{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{222 - 72{,}5}{2}\right)^2 + 97{,}5^2} = \begin{cases} 270{,}1 \\ 24{,}4 \end{cases} cm^4$

$$\Rightarrow w_\eta = \frac{-1000 \cdot \sin 26{,}26^\circ \cdot 1^4}{8 \cdot 210\,000 \cdot 270{,}1} \left[\frac{N \cdot mm^4}{mm^2 \cdot cm^4}\right] = \underline{\underline{-0{,}0975\ mm}}$$

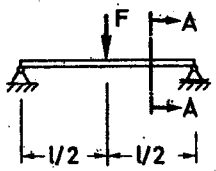
$$w_\zeta = \frac{1000 \cdot \cos 26{,}26^\circ \cdot 1^4}{8 \cdot 210\,000 \cdot 24{,}39} \cdot 10^5 = \underline{\underline{+2{,}1886\ mm}}$$

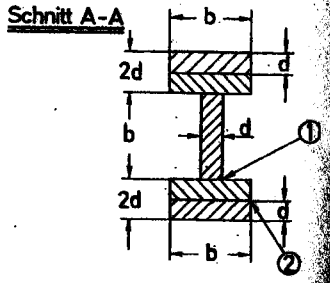


$$w_B = 2{,}1886 \cdot \cos 26{,}26^\circ + 0{,}0975 \cdot \sin 26{,}26^\circ = \underline{\underline{2{,}0059\ mm}}$$

$$v_B = 2{,}1886 \cdot \sin 26{,}26^\circ - 0{,}0975 \cdot \cos 26{,}26^\circ = \underline{\underline{0{,}8809\ mm}}$$

34. Ein beidseitig gestützter Träger wird durch eine Einzelkraft F mittig belastet. Der Träger ist – wie skizziert – aus fünf gleichen Rechteckprofilen zusammengesetzt, die miteinander verklebt sind. **Gegeben:** F, l, b, d. Berechne die in den Klebeflächen (1) und (2) auftretenden Schubspannungen.





$$I = 2 \cdot \frac{(2d)^3 \cdot b}{12} + 2 \cdot 2d \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + d\right)^2 + \frac{b^3 d}{12} = \frac{4}{3} d^3 b + \frac{b^3 d}{12} +$$

$$+ 4db\left(\frac{b^2}{4} + bd + d^2\right) = \frac{4}{3} d^3 b + \frac{b^3 d}{12} + \cancel{b^3 d} + 4b^2 d^2 + 4d^3 b$$

$$\underline{I = \frac{16}{3} d^3 b + \frac{13}{12} b^3 d + 4d^2 b^2}$$

Stelle ①: $\frac{S(z)}{b(z)} = \left(\frac{b}{2} + d\right) \cdot 2d \cdot b = \underline{db^2 + 2d^2 b}$

$b(z) = d$

$\rightarrow \underline{S(z)/b(z) = b^2 + 2db}$

Stelle ②: $S(z) = \left(\frac{b}{2} + \frac{3}{2} d\right) \cdot db = \frac{db^2}{2} + \frac{3}{2} d^2 b$

$b(z) = b$

$\rightarrow \underline{S(z)/b(z) = \frac{db}{2} + \frac{3}{2} d^2}$

$$\underline{Q = \frac{F}{2}} \qquad \tau = \frac{Q\, S(z)}{I\, b(z)}$$

$$\tau_① = \frac{F \cdot (b^2 + 2db)}{2 \cdot \left(\frac{16}{3} d^3 b + \frac{13}{12} b^3 d + 4d^2 b^2\right)} \underset{d \ll b}{\approx} \frac{6}{13} \frac{F}{bd}$$

$$\tau_② = \frac{F \cdot (db + 3d^2)}{4\left(\frac{16}{3} d^3 b + \frac{13}{12} b^3 d + 4d^2 b^2\right)} \underset{d \ll b}{\approx} \frac{3}{13} \frac{F}{b^2}$$