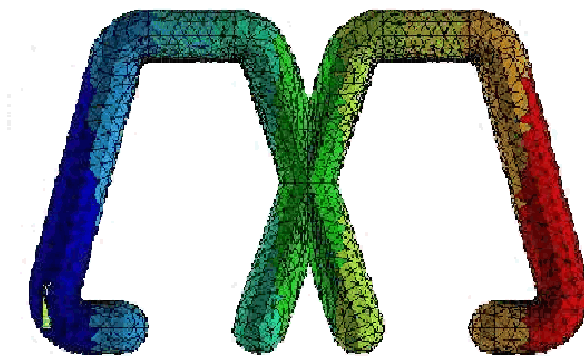

CM2 Semesterprojekt



Institut für CAE – Anwendungen

Thema:

**Finite – Elemente Untersuchung an der Montageeinheit
des Infrarot-Spektrographen Lucifer.**

1. Verzeichnisse

1.1. Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1. Verzeichnisse | 2 |
| 1.1. Inhaltsverzeichnis..... | 2 |
| 1.2. Abbildungsverzeichnis..... | 3 |
| 2. Aufgabenstellung | 4 |
| a) Strukturanalyse zur Bauteilauslegung | 4 |
| b) Modalanalyse..... | 4 |
| 3. Auswertung | 5 |
| 3.1. 3D-Modellierung..... | 5 |
| 3.2. Lagerung der Montageplattform..... | 5 |
| 3.3. Belastungen und Konfigurationen bei der Statische Analyse..... | 6 |
| 3.4. Belastung und Konfigurationen bei der Modal-Analyse | 7 |
| 3.5. Grundkonfigurationen für die Berechnung..... | 8 |
| 3.5.1 Konfiguration 1..... | 9 |
| 3.5.2 Konfiguration 2..... | 9 |
| 3.5.3 Konfiguration 3..... | 10 |
| 3.6. Ergebnis..... | 11 |
| 3.6.1 Ergebnis der statischen Berechnung..... | 11 |
| 3.6.2 Ergebnis der Modal- Analyse | 15 |
| 4. FEM- Untersuchung nach dem Checklisten-Verfahren..... | 17 |
| 4.1. Physikalische Modellierungen | 17 |
| 4.1.1. Allgemeine Definitionen | 17 |
| 4.1.1.1. Systemgrenzen..... | 17 |
| 4.1.1.2. Systembeschreibung | 17 |
| 4.1.2. Idealisierungen (Planungsphase) | 18 |
| 4.1.2.1. Geometrie Eigenschaften..... | 18 |
| 4.1.2.2. Material Eigenschaften..... | 18 |
| 4.1.2.3. Belastungen | 18 |
| 4.1.2.4. Randbedingungen | 18 |
| 4.2. FEM -Modellgenerierung | 18 |
| 4.2.1 Geometrie (Pre-Processing)..... | 18 |
| 4.2.1.1 Solid Modelling | 19 |
| 4.2.2 Elementierung (Pre-Processing)..... | 19 |
| 4.2.2.1 Element-Typen-Auswahl | 19 |
| 4.2.2.2 Elementdaten-Definition | 19 |
| 4.2.3 Materialien (Pre-Processing)..... | 20 |
| 4.2.3.1 Material-Modell..... | 20 |
| 4.2.3.2 Materialdaten-Definition | 20 |
| 4.2.4 Netz-Generierung (Pre-Processing) | 20 |
| 4.2.4.1 Auswahl der Vernetzungsart | 20 |
| 4.2.4.2 Netzfeinheit | 20 |
| 4.2.4.3 Set-Definition..... | 21 |
| 4.2.4.4 Spezielle Elemente | 21 |
| 4.3. Berechnung und Auswertung | 21 |
| 4.3.1 Analyse (Solution)..... | 21 |
| 4.3.1.1 Geometrische Randbedingungen | 21 |
| 4.3.1.2 Statische Analyse | 21 |
| 4.3.1.3 Modal-Analyse..... | 21 |
| 4.3.2 Auswertung..... | 22 |
| 4.3.2.1 Ergebnis-Verifikation..... | 22 |
| 4.3.2.2 Ergebnis-Dokumentation..... | 24 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 5. Diskussion | 25 |
| 5.1. Ziele des Projektes..... | 25 |
| 5.2. Hauptergebnisse..... | 25 |
| 5.3. Ergebniskontrolle..... | 26 |
| 5.4. Weitere Resultate..... | 26 |
| 5.5. Resümee..... | 27 |
| 6. Anhang | 28 |
| 6.1. Profiltabelle..... | 28 |
| 6.2. Skizzen, Katalogseiten..... | 31 |
| 6.3. Literaturhinweise..... | 34 |

1.2. Abbildungsverzeichnis

| | |
|---|----|
| Abb. 1: Belastungsaufbringung Statische Analyse..... | 7 |
| Abb. 2: Gestell mit Grundbelastung durch Lucifer- Modul (Konfig. 1) Durchbiegung USUM..... | 11 |
| Abb. 3 Gestell mit Grundbelastung durch Lucifer- Modul (Konfig. 1) Vergleichsspannung von Mises..... | 12 |
| Abb. 4: Gestell mit überlagerter Belastung durch Lucifer- Modul und Monteure (Konfig. 1) Durchbiegung USUM..... | 12 |
| Abb. 5: Gestell mit überlagerter Belastung durch Lucifer- Modul und Monteure (Konfig. 2) Durchbiegung USUM..... | 13 |
| Abb. 6: Gestell mit überlagerter Belastung durch Lucifer- Modul und Monteure (Konfig. 3) Durchbiegung USUM..... | 13 |
| Abb. 7: Durchbiegung fest eingespannte Bodenplatte mit 500Kg Flächenlast..... | 14 |
| Abb. 8: Eigenschwingungsfrequenzen Konfiguration 1..... | 15 |
| Abb. 9: Eigenschwingungsfrequenzen Konfiguration 2..... | 15 |
| Abb. 10: Eigenschwingungsfrequenzen Konfiguration 3..... | 16 |
| Abb. 11: Verformung bei der Eigenschwingungsfrequenz von 37,533 Hz (Konfiguration 2)..... | 16 |
| Abb. 12: Abmessungen der Bodenplatte..... | 23 |
| Abb. 13: Durchmesser der berechneten Kreisplatten..... | 23 |
| Abb. 14: Handskizze Geometrie-Erzeugung..... | 32 |

2. Aufgabenstellung

Der Infrarot-Spektrograph Lucifer wird zur Montage der Einzelkomponenten auf einer Montageeinrichtung befestigt. Das aus U-Profilen gefertigte Untergestell und die Standfüße sind beanspruchungsgerecht ausgelegt.

Die Bodenplatte besteht aus vier Einzelteilen. Sie dient als Standplatz für Montagearbeiten. Die zur Befestigung notwendige Trägerkonstruktion inklusive der Geländer ist entsprechend der auftretenden Belastungen mit dem FE-Programm ANSYS auszulegen. Für die Träger und Geländer soll Stahl-Normprofil verwendet werden. Als Bodenplattenmaterial ist Holz vorzusehen.

Es treten folgende Gewichtsbelastungen auf:

Belastung durch Lucifer $m_{\text{Lucifer}} = 3500 \text{ kg}$

Belastung je Bodenplattenteil durch Monteure und Teile $m_B = 500 \text{ kg}$

Es sind folgende FE-Analysen im belasteten Zustand durchzuführen:

a) Strukturanalyse zur Bauteilauslegung

- Auslegung der Bodenplatten aus Holz (Materialstärke)
- Auslegung der Bodenplattenträger und Geländer (Querschnitte, Flächenträgheitsmomente)

b) Modalanalyse

- Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen im Frequenzbereich von 0...8 Hz.

Das FE-Modell soll aus Balken und Schalenelementen generiert werden. Die Durchbiegung der Bodenplatte ist überschlägig mit einer Handrechnung zu überprüfen.

Die gesamte Finite-Elemente-Untersuchung soll nach dem Checklisten-Verfahren abgearbeitet werden.

3. Auswertung

3.1. 3D-Modellierung

Das gesamte Modell, das in ANSYS erstellt wurde, besteht aus 3 verschiedenen Elementtypen (Beam, Mass und Shell).

Das gesamte Modell ist in ANSYS mit Hilfe kartesischer Koordinaten, die aus Pro-Engineer entnommen wurden, erzeugt worden. Um den Aufwand der Erzeugung des gesamten Modells zu verringern, ist nur ein Viertel der gesamten Montageplattform modelliert worden, das anschließend über die XY- und YZ- Ebene gespiegelt wurde, um das gesamte Modell zu erhalten. Am Ende der Erstellung mussten die Knoten (Nodes) und die Keypoints der Konstruktion verschmolzen werden, um eine feste Verbindung der 4 einzelnen Bauteile zu erzeugen. Die Vorgehensweise bei der Modellierung war: Keypoints in kartesischen Koordinaten → Verbindungen der Keypoints an den Positionen der Träger über Lines → Erstellung der Flächen mit Area.

Die gesamten Träger sind als Beam definiert, was den Vorteil hat, dass die Biegemomente, die durch die Belastung hervorgerufen werden in die Montageplattform weitergeleitet werden. Der einzige Unterschied zwischen den verschiedenen Trägern ist im Real Constants Set verankert, wobei sich nur 3 Punkte unterscheiden, die die mechanischen Eigenschaften der unterschiedlichen Normprofile wiedergeben (Querschnittsfläche, Flächenträgheitsmoment I_{yy} und Flächenträgheitsmoment I_{zz}). Die Lauffläche, die aus Holz besteht, ist als Shell definiert worden, die als Berandung die Trägerkonstruktion besitzt. Um das Modell im Rahmen des CM2 Projekts zu erzeugen musste auf einige konstruktive Feinheiten, die in Pro-Engineer erzeugt wurden verzichtet werden.

3.2. Lagerung der Montageplattform

Die Montageplattform besitzt 12 Standfüße, die für die Berechnung in ANSYS fest eingespannt sind.

3.3. Belastungen und Konfigurationen bei der Statische Analyse

Bei der statischen Analyse wurden drei Halbzeugkonfigurationen überprüft. Die einzelnen Normprofile, die bei der jeweiligen Konfiguration zum Einsatz gekommen sind, werden in Kapitel 3.5 tabellarisch aufgelistet.

Bei der statischen Berechnung der Montageplattform wurde eine auf die Aufgabe angepasste Belastungsart gewählt, die den realen Bedingungen näher kommt als die für die Modalanalyse gewählte Belastungsart. Die Belastung, die durch die Gewichtskraft des Lucifer-Moduls ($m_{\text{Lucifer}}=3,5\text{t}$) besteht, ist als Linienbelastung auf die 4 Auflagerträger verteilt worden, damit die Träger nicht auf Torsion beansprucht werden. Jeder Träger verfügt auf seiner Länge über 4 Keypoints, auf die dann jeweils eine Belastung von $m_{\text{Lucifer}}/16$ in $-F_z$ - Richtung wirkt.

Die Flächenbelastung, die durch arbeitende Monteure auftritt wird mit maximal 500 Kg (Arbeiter und eventuell zu montierende Aggregate) angenommen. Die Lastaufbringung wurde auf eine Kreisfläche in der Einstiegszone der Plattform begrenzt, da in diesem Punkt kein Geländer existiert und die Monteure bis zum Rand der Bodenplatte laufen können, was zu einer maximalen Durchbiegung durch geringere Verstrebnungsanzahl führt. Die statische Analyse wurde mit 2 Belastungsfällen, die zum einen einzeln und zum anderen überlagernd aufgebracht wurden, berechnet:

- Grundbelastung durch die Gewichtskraft des Lucifer-Moduls
- Belastung durch die Gewichtskraft der Monteure

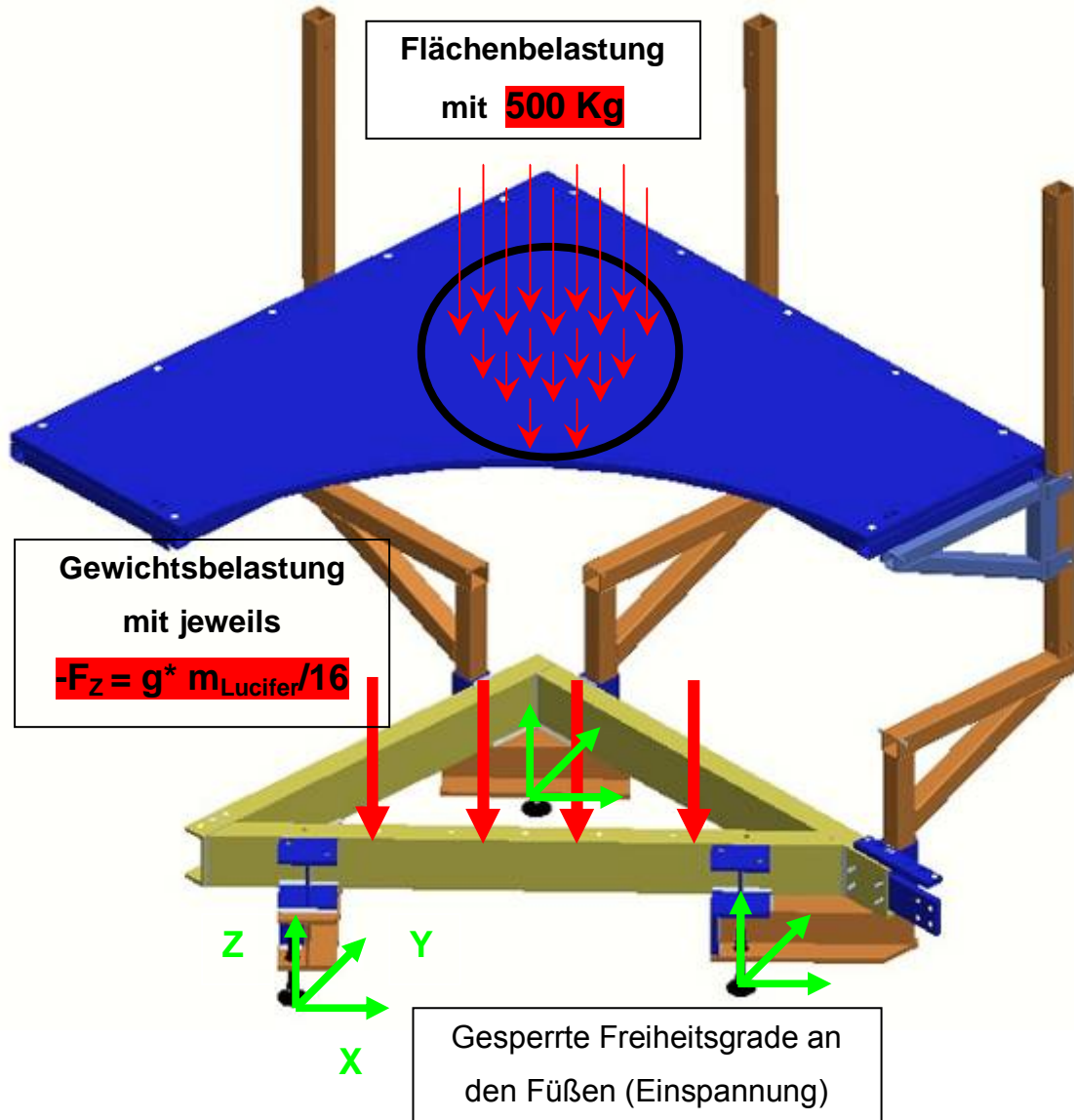


Abb. 1: Belastungsaufbringung Statische Analyse

3.4. Belastung und Konfigurationen bei der Modal-Analyse

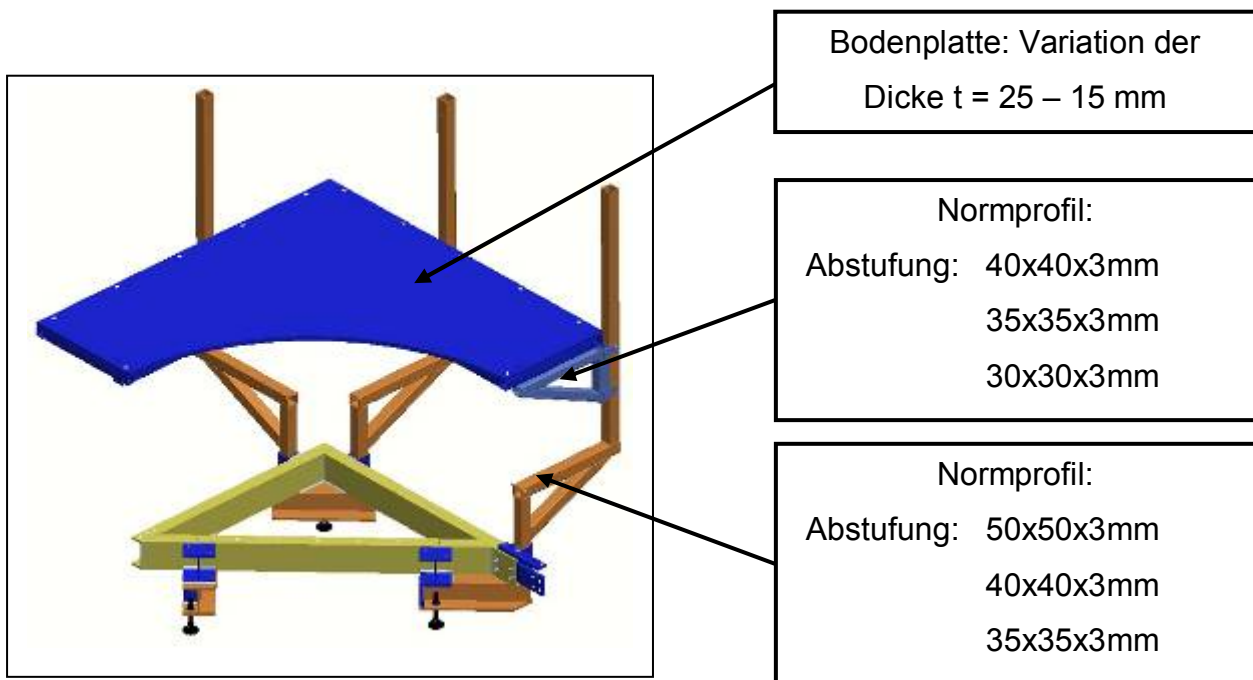
Bei der Modal-Analyse sind die gleichen Grundkonfigurationen wie in der statischen Analyse zum Einsatz gekommen. Der einzige Unterschied liegt in der Lastaufbringung, da bei dieser Berechnung auch der Schwerpunkt der Masse des Lucifer-Moduls ($m_{\text{Lucifer}}=3,5\text{t}$) eine wichtige Rolle spielt.

Um in diese Berechnung den Schwerpunkt des Moduls mit einzubeziehen wurde der Massenpunkt über 16 Stangen, die an denselben Positionen (Keypoints) sitzen, wie die Gewichtsbelastung in Abb. 1: Belastungsaufbringung Statische Analyse. Die Verbindungsstangen haben einen sehr hohen E-Modul und sind mit den Auflageträgern der Montageplattform verbunden.

Bei der Berechnung der Eigenschwingungsfrequenzen ist nur mit der Masse des Moduls gerechnet worden, da diese als einzige Gewichtsbelastung direkt mit der Montageplattform verschraubt ist, und somit eine feste Verbindung mit der Montageplattform besteht.

3.5. Grundkonfigurationen für die Berechnung

Eine tabellarische Übersicht von allen im Einsatz befindlichen Profilen ist im Anhang ersichtlich. Im Folgenden werden die Profile dargestellt, mit deren Querschnitts- oder Dickenreduktion gerechnet wurde.



Die anschließenden Tabellen enthalten eine genaue Übersicht, welche Bauteile in welcher Konfiguration untergebracht sind.

3.5.1 Konfiguration 1

| Profil [mm] | Querschnittsfläche [cm ²] | Flächenträgheitsmoment [cm ⁴] | |
|-------------------------|---------------------------------------|---|-----------------|
| | | I _{yy} | I _{zz} |
| <p>h = 25</p> | - | - | - |
| <p>B = 50 T = 3</p> | 5,54 | 20,20 | 20,20 |
| <p>B = 40 T = 3</p> | 5,59 | 9,78 | 9,78 |

3.5.2 Konfiguration 2

| Profil [mm] | Querschnittsfläche [cm ²] | Flächenträgheitsmoment [cm ⁴] | |
|-------------------------|---------------------------------------|---|-----------------|
| | | I _{yy} | I _{zz} |
| <p>h = 20</p> | - | - | - |
| <p>B = 45 T = 3</p> | 4,81 | 13,8 | 13,8 |
| <p>B = 35 T = 3</p> | 3,61 | 5,95 | 5,95 |

3.5.3 Konfiguration 3

| Profil [mm] | Querschnittsfläche [cm ²] | Flächenträgheitsmoment [cm ⁴] | |
|-------------------------|---------------------------------------|---|-----------------|
| | | I _{yy} | I _{zz} |
| <p>h = 15</p> | - | - | - |
| <p>B = 40 T = 3</p> | 4,34 | 9,78 | 9,78 |
| <p>B = 30 T = 3</p> | 3,14 | 3,74 | 3,74 |

3.6 Ergebnis

3.6.1 Ergebnis der statischen Berechnung

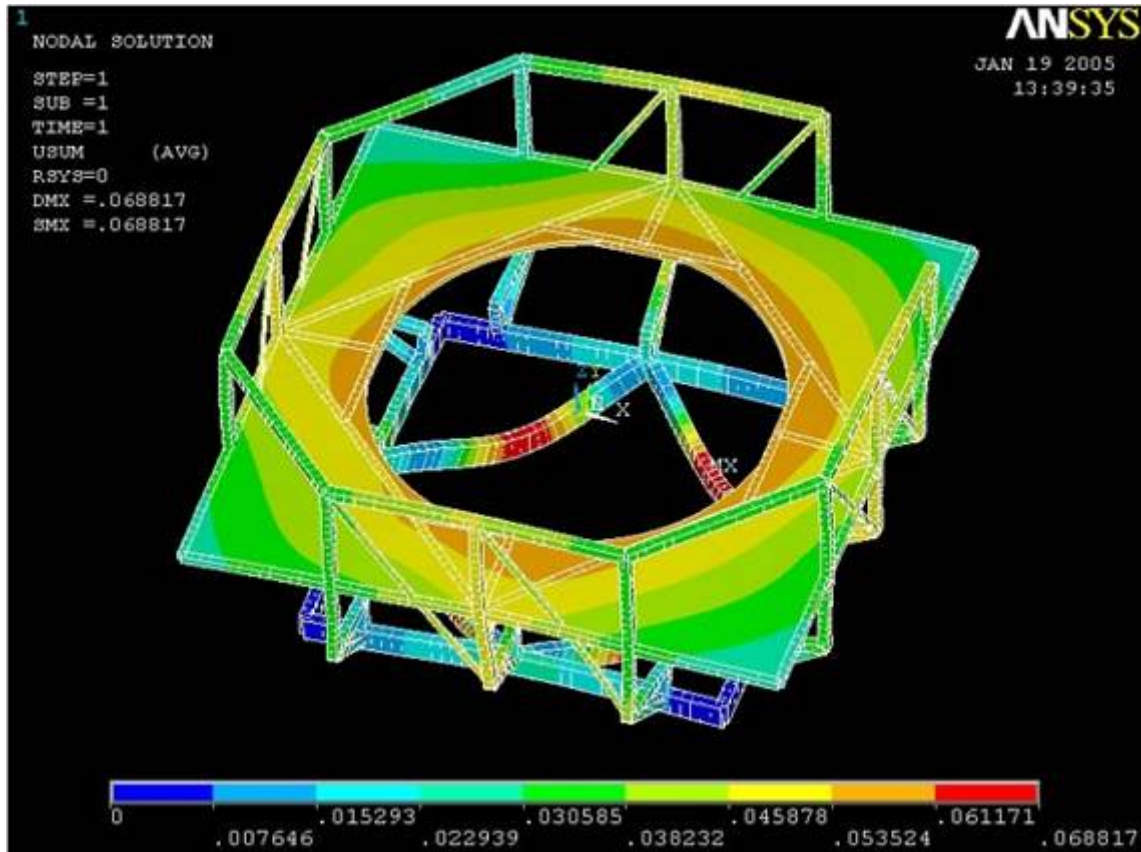


Abb. 2: Gestell mit Grundbelastung durch Lucifer-Modul (Konfig. 1) Durchbiegung USUM

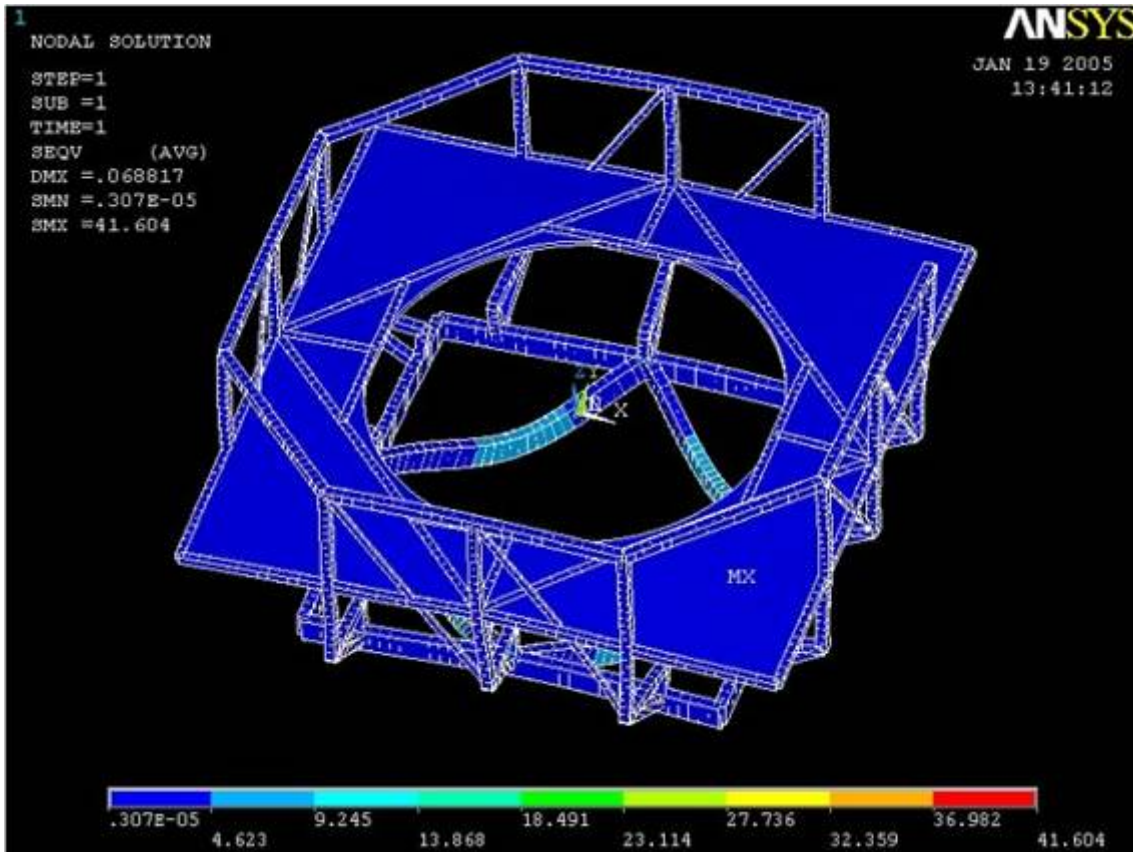


Abb. 3 Gestell mit Grundbelastung durch Lucifer-Modul (Konfig. 1) Vergleichsspannung von Mises

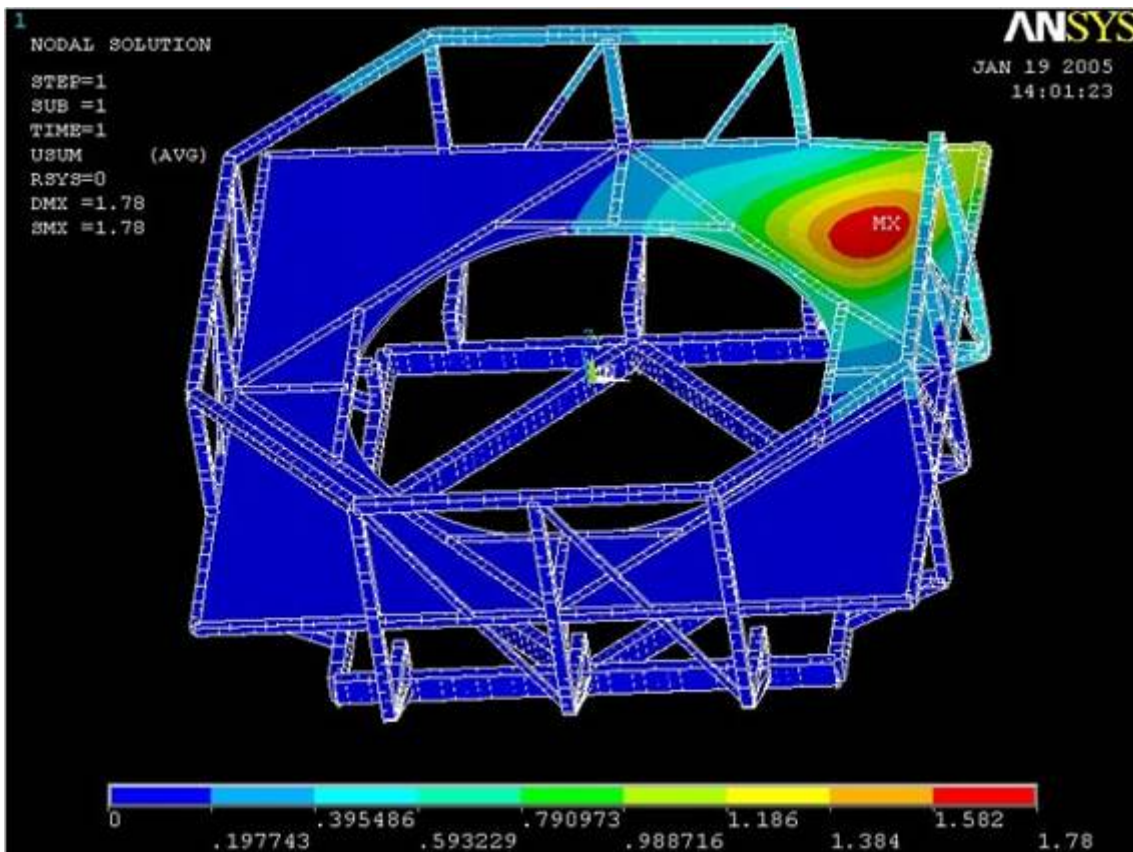


Abb. 4: Gestell mit überlagerter Belastung durch Lucifer-Modul und Monteure (Konfig. 1) Durchbiegung USUM

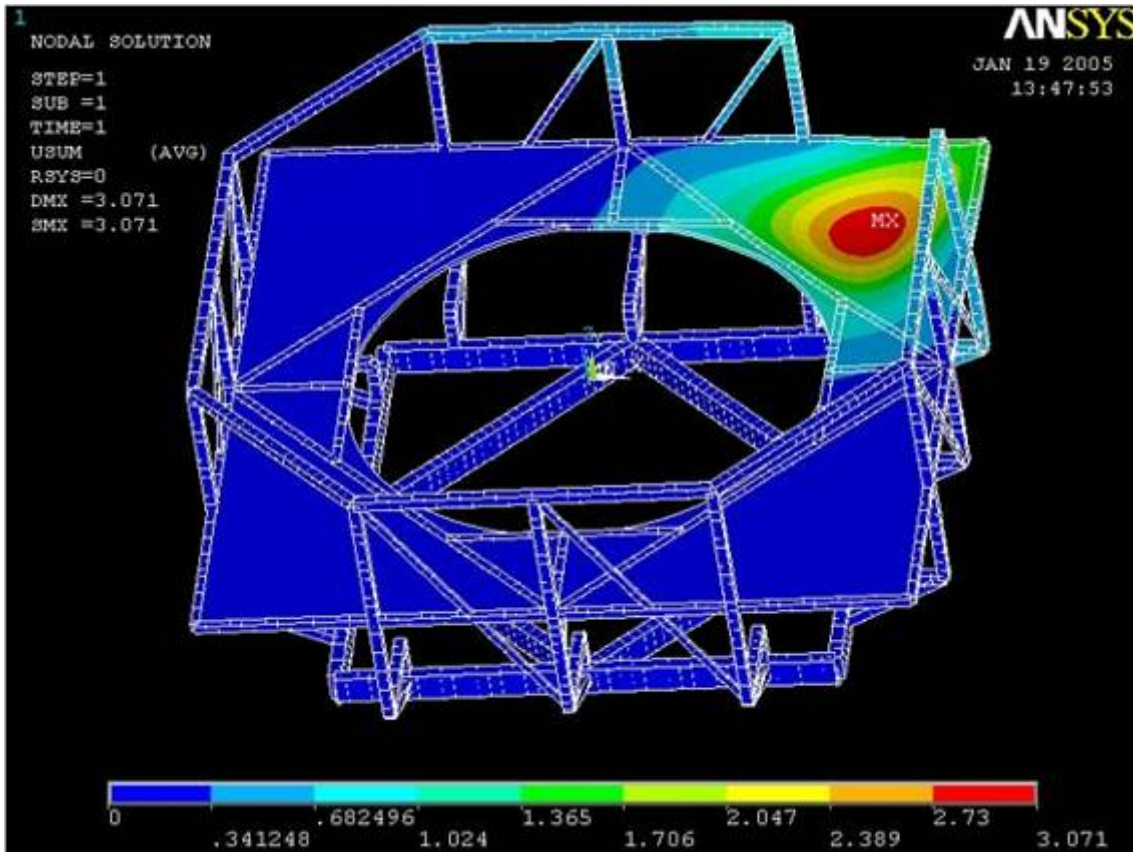


Abb. 5: Gestell mit überlagerter Belastung durch Lucifer-Modul und Monteure (Konfig. 2) Durchbiegung USUM

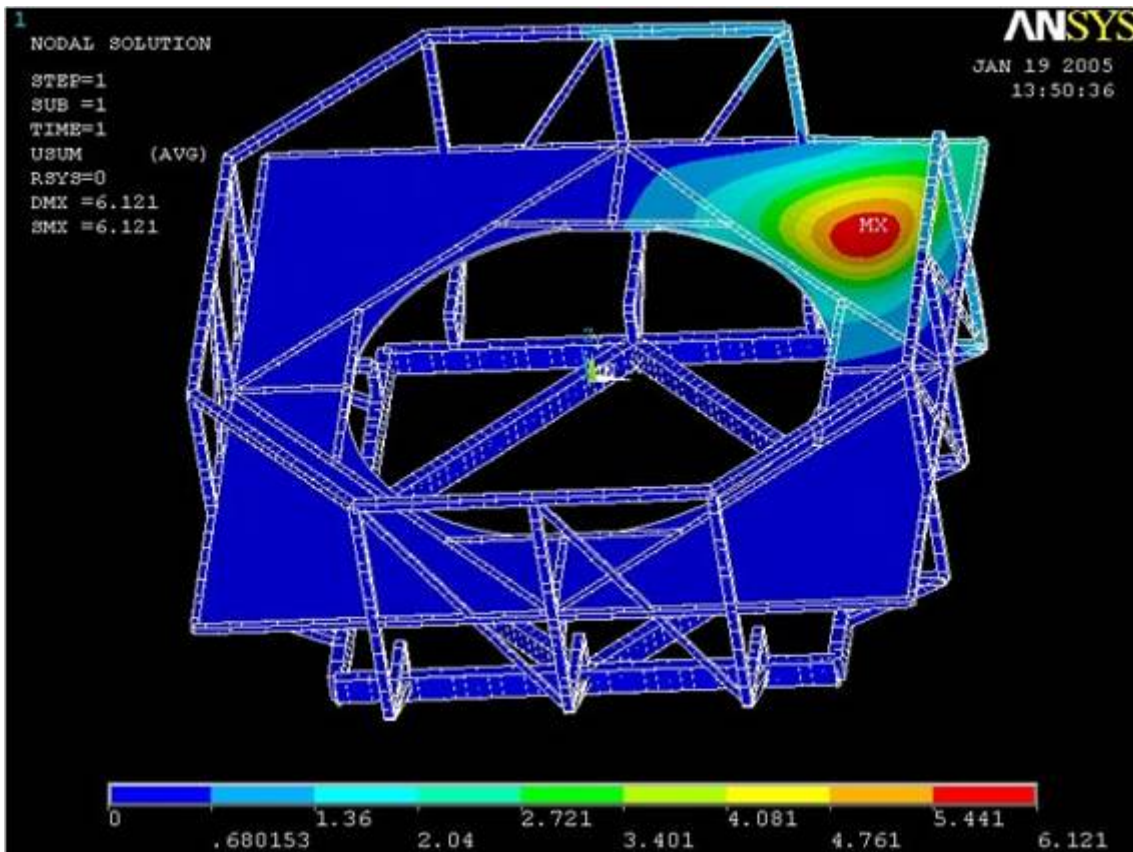


Abb. 6: Gestell mit überlagerter Belastung durch Lucifer-Modul und Monteure (Konfig. 3) Durchbiegung USUM

Zur Verifikation der Rechenergebnisse, die mit Hilfe des Programms ANSYS berechnet wurden, ist parallel dazu noch eine Handrechnung durchgeführt worden (siehe Kap. Ergebnis-Verifikation). Um diese Handberechnung mit dem Modell vergleichen zu können, wurde der Rahmen, der die Bodenplatte trägt, mit einem sehr hohen E-Modul versehen, um bei einer aufgetragenen Kraft nur die Durchbiegung der Bodenplatte zu erhalten.

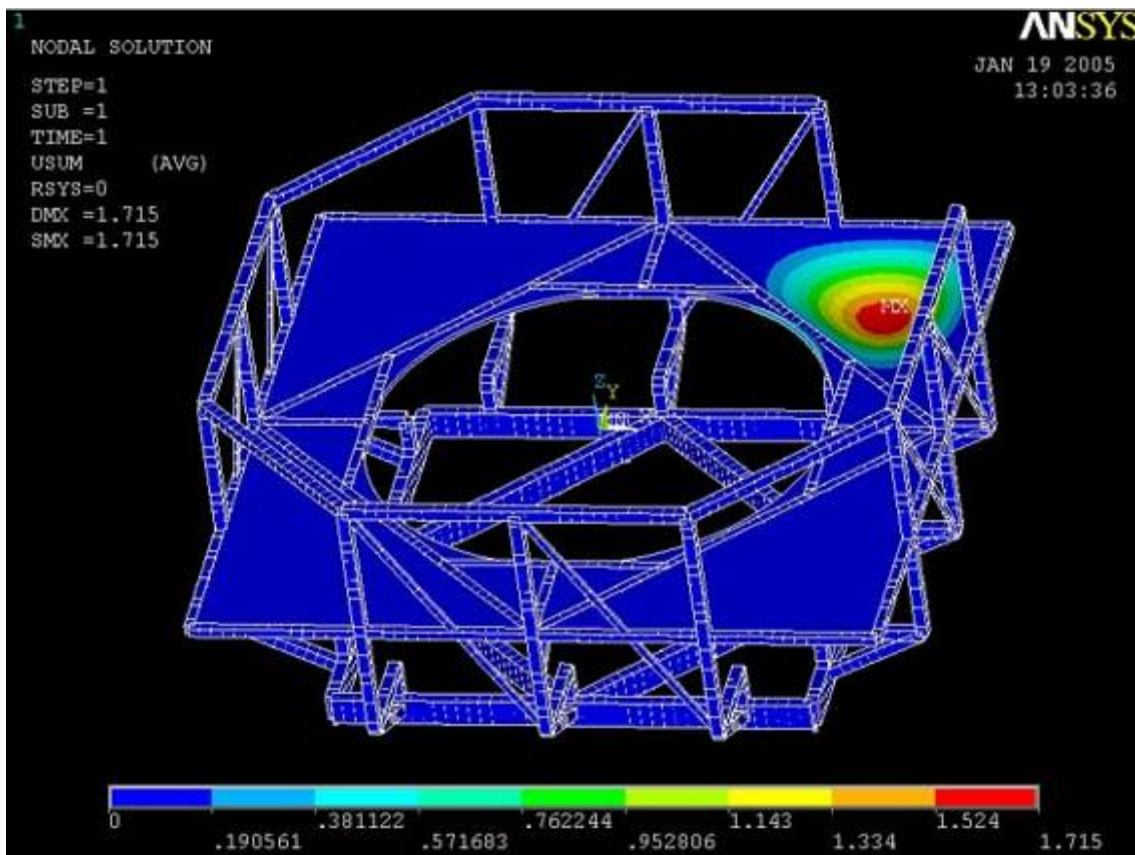


Abb. 7: Durchbiegung fest eingespannte Bodenplatte mit 500Kg Flächenlast

In der Handberechnung ist ein Plausibilitätsbereich von $0,305 \text{ mm} \leq |w_{FEM}| \leq 1,79 \text{ mm}$ errechnet worden, der die mit ANSYS ermittelte Durchbiegung von $USUM_{\max} = 1,715 \text{ mm}$ bestätigt.

3.6.2 Ergebnis der Modal-Analyse

SET_LIST Command

File

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

```

| SET | TIME/FREQ | LOAD STEP | SUBSTEP | CUMULATIVE |
|-----|-----------|-----------|---------|------------|
| 1 | 22.353 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 23.093 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 28.019 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 38.248 | 1 | 4 | 4 |
| 5 | 40.033 | 1 | 5 | 5 |
| 6 | 41.119 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 42.332 | 1 | 7 | 7 |
| 8 | 42.594 | 1 | 8 | 8 |
| 9 | 42.605 | 1 | 9 | 9 |
| 10 | 42.749 | 1 | 10 | 10 |

Abb. 8: Eigenschwingungsfrequenzen Konfiguration 1

SET_LIST Command

File

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

```

| SET | TIME/FREQ | LOAD STEP | SUBSTEP | CUMULATIVE |
|-----|-----------|-----------|---------|------------|
| 1 | 21.273 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 22.128 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 27.171 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 34.007 | 1 | 4 | 4 |
| 5 | 35.197 | 1 | 5 | 5 |
| 6 | 36.246 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 36.975 | 1 | 7 | 7 |
| 8 | 37.533 | 1 | 8 | 8 |
| 9 | 41.722 | 1 | 9 | 9 |
| 10 | 42.225 | 1 | 10 | 10 |

Abb. 9: Eigenschwingungsfrequenzen Konfiguration 2

SET,LIST Command

File

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

```

| SET | TIME/FREQ | LOAD STEP | SUBSTEP | CUMULATIVE |
|-----|-----------|-----------|---------|------------|
| 1 | 19.832 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 20.759 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 25.717 | 1 | 3 | 3 |
| 4 | 32.084 | 1 | 4 | 4 |
| 5 | 33.013 | 1 | 5 | 5 |
| 6 | 33.832 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 34.414 | 1 | 7 | 7 |
| 8 | 35.087 | 1 | 8 | 8 |
| 9 | 40.572 | 1 | 9 | 9 |
| 10 | 41.514 | 1 | 10 | 10 |

Abb. 10: Eigenschwingungsfrequenzen Konfiguration 3

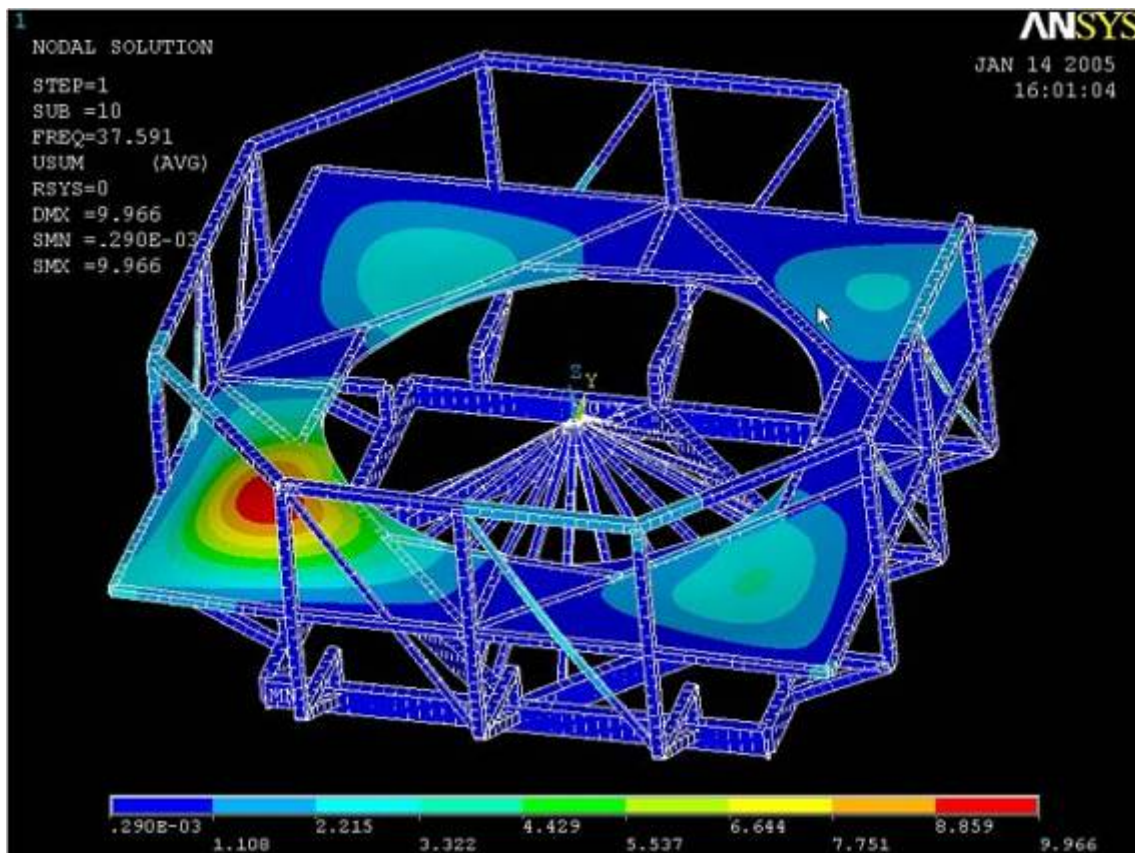


Abb. 11: Verformung bei der Eigenschwingungsfrequenz von 37,533 Hz (Konfiguration 2)

4. FEM-Untersuchung nach dem Checklisten-Verfahren

4.1. Physikalische Modellierungen

4.1.1. Allgemeine Definitionen

4.1.1.1. Systemgrenzen

Fußboden, Modulbefestigung

4.1.1.2. Systembeschreibung

Teilsysteme: Lucifer, Modulbefestigung, Untergestell mit Standfüßen, Geländer, Trägerkonstruktion, Bodenplatte

Kopplung: Die Teilsystem greifen in fest verbundener Reihenfolge: Standfüße → Untergestell → Modulbefestigung → Geländer → Trägerkonstruktion → Bodenplatte

Material:

- Bodenplatte aus Holz
- Gestelle, Geländer, Träger aus Stahl:

Belastungen: Gewichtsbelastungen:

- durch Lucifer $m_{\text{Lucifer}} = 3500 \text{ kg}$
- durch Monteure und Teile $m_B = 500 \text{ kg}$

Randbedingungen:

- Montagevorrichtung steht auf Hallenboden.
- An den Standfüßen keine Freiheitsgrade.

Gesuchte Ergebnisse:

- Durchbiegung, Spannung (Notwendige Trägerquerschnitte, Dicke der Holzbodenplatte)
- Eigenfrequenzen und Eigenformen (0...8 Hz)

4.1.2 Idealisierungen (Planungsphase)

4.1.2.1 Geometrie Eigenschaften

Dimensionalität: 3-dimensional (Einheitensystem: N-mm-s)

4.1.2.2 Material Eigenschaften

Linearität: Linearelastisches Material (E-Modul konstant)

Isotropie: liegt vor

Abhängigkeiten: Materialdaten sind konstant

4.1.2.3 Belastungen

Dimensionalität: 3-dimensional Flächenlast (Monteure);
Punktlast (Lucifer)

Lastart: statische vertikale Lasten

Zeitabhängigkeit: zeitlich konstante Belastung

4.1.2.4 Randbedingungen

Starre und elast. Lagerungen: An den Standfüßen starre Festlagerung

Vorgeschr. Verschiebungen: keine

Kontaktbedingungen: keine

Kopplungsbedingungen: keine

4.2 FEM-Modellgenerierung

4.2.1 Geometrie (Pre-Processing)

Elementar-Geometrien: Rechteckprofile mit unterschiedlichen Querschnitten,
U-Profil, Bodenplatte

CAD-Geometrie-Transfer: nicht notwendig

Segmentierung: nicht notwendig

Strategie: Bottom up (Generierung und Verknüpfung von
Keypoints, Generierung von Lines)

Kopplung von Teilgeometrien: nach Teilgeometrieerzeugung folgt Spiegelung

4.2.1.1 Solid Modelling

Anhand der Geometriedaten

4.2.2 Elementierung (Pre-Processing)

4.2.2.1 Element-Typen-Auswahl

Ausgewählte Elemente: BEAM4, SHELL63, MASS21
 Notwendige Freiheitsgrade: alle des jeweiligen Elements
 Belastungsmöglichkeiten: 3-dimensional, je nach Elementtyp
 Kompatibilität: entfällt
 Mögliche Einschränkungen: entfällt

4.2.2.2 Elementdaten-Definition

| Real Constants Set | Elementtyp |
|--------------------|------------|
| 1 | BEAM4 |
| 2 | BEAM4 |
| 3 | BEAM4 |
| 4 | BEAM4 |
| 5 | SHELL63 |
| 6 | BEAM4 |
| 7 | MASS21 |
| 8 | BEAM4 |

Einzelheiten siehe Kap. 3.5 (Grundkonfigurationen für die Berechnung) und Anhang (Profiltabelle)!

4.2.3 Materialien (Pre-Processing)

| | |
|-----------------------|---|
| E-Modul: | $E_{\text{Stahl}} = 210000 \text{ N/mm}^2$; $E_{\text{Holz}} = 7500 \text{ N/mm}^2$ |
| Querkontraktionszahl: | $\nu_{\text{Stahl}} = 0,3$; $\nu_{\text{Holz}} = 0,45$ |
| Dichte: | $\rho_{\text{Stahl}} = 7,85 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3$; $\rho_{\text{Holz}} = 0,8 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3$ |

4.2.3.1 Material-Modell

| | |
|-------------------------|---|
| Typisierung: | linear elastisch (Spannung und Dehnung einander proportional) |
| Linearität: | ja, da $E = \text{konstant}$ |
| Isotropie: | ja |
| Zeitabhängigkeit: | nein |
| Temperaturabhängigkeit: | nein |

4.2.3.2 Materialdaten-Definition

Drei Material-Modelle, Zuweisung siehe Anhang (Profiltabelle)

$$E_{\text{Stahl}} = 210000 \text{ N/mm}^2; \nu_{\text{Stahl}} = 0,3; \rho_{\text{Stahl}} = 7,85 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3;$$

$$E_{\text{Holz}} = 7500 \text{ N/mm}^2; \nu_{\text{Holz}} = 0,45; \rho_{\text{Holz}} = 0,8 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3$$

4.2.4 Netz-Generierung (Pre-Processing)

4.2.4.1 Auswahl der Vernetzungsart

| | |
|----------------------|--|
| Direkte Generierung: | ja |
| Mapped Meshing: | nein |
| Free Meshing: | ja, Vernetzung der Bodenplatte mit SHELL-Elementen, Nutzung der Vernetzungseinteilung der Linien |

4.2.4.2 Netzfeinheit

| | |
|----------------------------------|---|
| Einteilung der Berandungslinien: | Elementierte Linien dienen der Vernetzungseinstellung der Holzbodenfläche |
| Elementkantenlänge: | 20 mm |
| Elementverzerrung: | Verfeinerung des Netzes an Stellen mit großen Maschen |

4.2.4.3 Set-Definition

Entfällt

4.2.4.4 Spezielle Elemente

Einzelmasse: Elementtyp MASS21; Masse in Z-Richtung MASSZ = 3500 kg

4.3 Berechnung und Auswertung

4.3.1 Analyse (Solution)

4.3.1.1 Geometrische Randbedingungen

Einzuschränkende Freiheitsgrade: $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ an den bodenberührenden Keypoints der Standfüße; Keypoints: 32, 33, 34, 69, 70, 71, 111, 112, 113, 146, 147, 148

Gravitation: In $-z$ -Richtung: ACELZ; Global Cartesian, Z-Komponente = -9810 mm/s^2

4.3.1.2 Statische Analyse

Belastungen: Kräfte siehe Abbildung bzw. Handskizze; Bodenplatte Kreisausschnitt mit 256 Knoten, je Knoten $F_z = -5000/256 \text{ N}$;

Je Untergestellträger 4 Keypoints mit $F_z = -35000/16 \text{ N}$; Keypoints: 28, 31, 36, 37, 63, 67, 68, 72, 104, 105, 110, 114, 141, 145, 146, 150

4.3.1.3 Modal-Analyse

Eigenform-Anzahl: erste 10 (zwischen 0...8 Hz)

Lösungsalgorithmus: Block-Lanzos

Dämpfung: keine

4.3.2 Auswertung

4.3.2.1 Ergebnis-Verifikation

| | |
|------------------|---|
| Prinzip: | Abschätzung der zu erwartenden Durchbiegung der Bodenplatte nach Minimal- und Maximalwert |
| Ansatz: | Lineare Plattentheorie ¹ für Kreisplatten |
| Randbedingungen: | Materialeigenschaften und -dicke wie oben, Flächen mit Kreisradien aus Innkreis und Umkreis des Dreiecks der freitragenden Bodenplatte (siehe Abbildungen), feste Einspannung am Rand, Rand verformungsfrei |
| Belastung: | konstante Flächenlast für Minimalwert bzw. zentrische Punktlast für Maximalwert jeweils entsprechend Betriebslast $m_B = 500 \text{ kg}$ |

Berechnung:

Kompressionsmodul:
$$K_{Boden} = \frac{E_{Holz} h_{Boden}^3}{12(1-\nu_{Holz}^2)} = \frac{7500 \text{ N} \cdot 20^3 \text{ mm}^3}{12(1-0,45^2) \cdot \text{mm}^2} \approx \underline{\underline{12,2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}}$$

Minimalwert der Durchbiegung (Kreisplatte mit konstanter Flächenlast):

$$r_{min} = 391 \text{ mm} (\Delta\text{-Innkreis}); \quad p_{min} = \frac{m_B g}{\pi r_{min}^2} = \frac{500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}}{\pi \cdot 391^2 \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{s}^2} \approx \underline{\underline{10,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

$$w_{min} = \frac{p_{min} r_{min}^4}{64 K_{Boden}} = \frac{10,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot 391^4 \text{ mm}^4}{64 \text{ mm}^2 \cdot 12,2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}} \approx \underline{\underline{0,305 \text{ mm}}}$$

Maximalwert der Durchbiegung (Kreisplatte mit zentrischer Punktlast):

$$r_{max} = 945 \text{ mm} (\Delta\text{-Umkreis}); \quad F_{max} = m_B g = 500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} = \underline{\underline{4905 \text{ N}}}$$

$$w_{max} = \frac{F_{max} r_{max}^2}{64 \pi K_{Boden}} = \frac{4905 \text{ N} \cdot 945^2 \text{ mm}^2}{64 \pi \cdot 12,2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}} \approx \underline{\underline{1,79 \text{ mm}}}$$

Plausibilitätsbereich:
$$\underline{\underline{0,305 \text{ mm} \leq |w_{FEM}| \leq 1,79 \text{ mm}}}$$

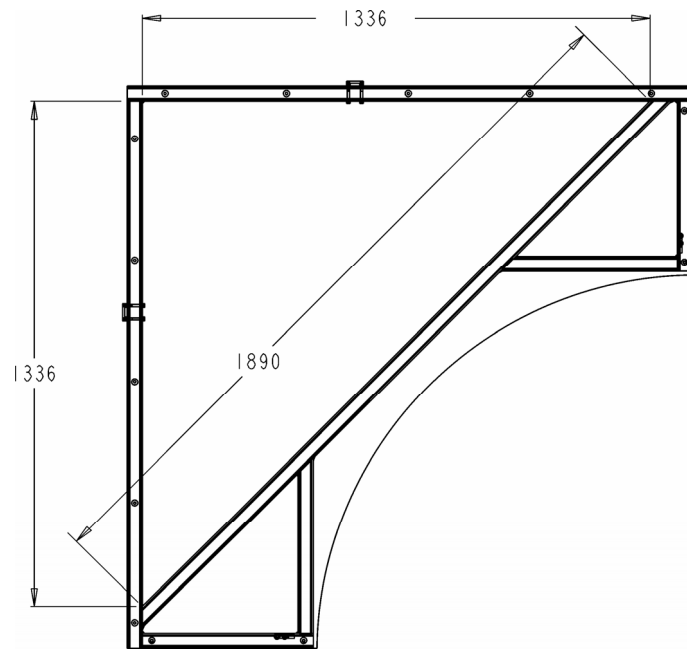


Abb. 12: Abmessungen der Bodenplatte



Abb. 13: Durchmesser der berechneten Kreisplatten

4.3.2.2 Ergebnis-Dokumentation

Listings: Statische Analyse: Entfällt
 Modalanalyse: Eigenkreisfrequenzen für drei Halbzeugkonfigurationen

Plottdarstellungen: Gesamtdarstellung in 3D-Ansicht für Verformungen und Spannungen durch Belastung mit Lucifermasse. 3D-Darstellung der Gesamtverformung resultierend aus Lucifer- und Monteuremasse für alle drei Halbzeugkonfigurationen. Repräsentative 3D-Darstellung der Eigenform bei entsprechender Eigenfrequenz.

Zeitverläufe: Entfällt

Animation: Entfällt

5. Diskussion

5.1. Ziele des Projektes

Während der Bearbeitung des vorliegenden Projektes konnte die systematische Vorgehensweise bei der Anwendung der Methode der Finiten Elemente zur Lösung eines Konstruktionsproblems sehr gut erprobt werden. Im Mittelpunkt der Betrachtung sollten dabei vor allem die Verformung des Montagegestells unter Belastung und seine Schwingneigung im Hinblick auf die Anforderungen an die Präzision bei Arbeiten am Infrarot-Spektrographen Lucifer stehen. Das Augenmerk richtete sich demnach weniger auf die Festigkeit der Gestellbauteile oder etwa auftretende Spannungskonzentrationen, da das Montagegestell bereits konstruktiv ausgelegt war und im Entwurf vorlag. Ziel sollte vielmehr eine Optimierung dieses Entwurfs sein. Hierbei bestand die Vorgabe, alle Profil-Bauteile des Gestells, soweit möglich, durch Finite Elemente nach dem Balkenmodell zu realisieren.

5.2. Hauptergebnisse

Wichtigstes Ergebnis ist eine statische Verformung der Montageplattform um höchstens $1,78 \text{ mm}$ unter maximal zu erwartender Betriebsbelastung durch 3...4 Monteure, die eine Last heben (insgesamt 500 kg), wenn der vorliegende Konstruktionsentwurf unverändert zur Ausführung kommt. Es erwies sich, dass hierbei die maximale Deformation des Grundrahmens, verursacht durch die Gewichtskraft des Spektrographen, lediglich etwa $0,07 \text{ mm}$ beträgt, ihr Einfluss auf die Verformung der Montageplattform also vernachlässigbar gering ist. Eine versuchsweise Wegnahme der Zusatzlast auf der Plattform bestätigte diese Annahme, wobei die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungs-Energie-Hypothese nur einen Maximalwert von $41,6 \text{ N/mm}^2$ erreicht. Des Weiteren zeigte die Modale Analyse des Konstruktionsentwurfs, dass im relevanten Frequenzspektrum von 0 bis 8 Hz keine Resonanzschwingungen auftreten können und darüber hinaus die erste Eigenfrequenz des Systems bei $22,4 \text{ Hz}$, also um mehr als eine Oktave über diesem Bereich liegt.

5.3. Ergebniskontrolle

Zur Absicherung des Resultats der statischen Analyse wurde die Durchbiegung der Bodenplatte aus Holz durch analytische Berechnung abgeschätzt, um einen Plausibilitätsbereich für die Werte aus der Finite-Elemente-Methode zu erhalten. Hieraus ergab sich die Forderung, dass die Verformung der Platte relativ zu einer etwa auftretenden Deformation ihrer Randeinspannung innerhalb eines Intervalls von ca. 0,3 mm bis 1,8 mm liegen muss. Diese Forderung wurde vom Ergebnis aus ANSYS mit 1,72 mm Durchbiegung knapp erfüllt.

5.4. Weitere Resultate

Zur Optimierung des Konstruktionsentwurfs im Sinne der Material- und damit Kosteneinsparung, was ja die erweiterte Aufgabenstellung des Projektes war, wurden zwei sinnvolle Variationen der Konstruktion erstellt und mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode berechnet. Diese beinhalteten die schrittweise Reduzierung der verwendeten Materialquerschnitte des Montagegestells und zwar durch Auswahl des nächst kleineren Profils aus der jeweiligen DIN-ISO-Norm bzw. durch Verringerung der Dicke des Holzbodens. Hierbei zeigten sich die Vorteile der FE-Modellierung mittels Balkenelementen gegenüber einer geometrie-orientierten Elementierung besonders deutlich, war es doch mit Hilfe von ANSYS möglich, die Materialeigenschaften, also Querschnittsflächen und Flächenträgheitsmomente, gemeinsam für alle Elemente eines bestimmten Profiltyps zu verändern. Dadurch verringerte sich der Änderungsaufwand z.B. im Vergleich zur Verwendung von Schalenelementen beträchtlich.

Resultate waren zwei weitere Konfigurationen für die Gestell-Konstruktion, die nun erwartungsgemäß bei der statischen Analyse größeren Verformungen unterlagen, nämlich maximal 3,1 mm bei Konfiguration zwei und bis zu 6,1 mm bei der dritten Konfiguration. Es zeigte sich jedoch, dass die Querschnittsverringerung auf die Schwingneigung des Montagegestells kaum Einfluss hatte. So verringerte sich die unterste Eigenfrequenz von Konfiguration 2 lediglich auf rund 21,3 Hz und von Konfiguration 3 auf etwa 19,8 Hz. Es sei aber angemerkt, dass auftragsgemäß die Querschnitte des Grundrahmens, der die Hauptlast des Infrarot-Spektrographen trägt, nicht verändert wurden.

Die Frage, ob die stärkeren Deformationen bei Querschnittsverringern letztlich tolerabel sind bzw. in einem angemessenen Verhältnis zur erzielten Kostenreduzierung stehen, ist allerdings nicht Bestandteil der Aufgabenstellung gewesen und muss vom Auftraggeber beantwortet werden.


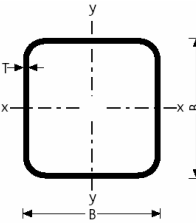
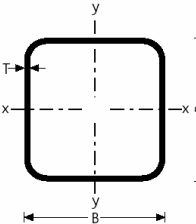
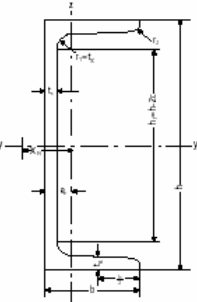
5.5. Resümee

Während der Realisierung des FE-Modells in ANSYS bestand eine wesentliche Schwierigkeit darin, eine im Hinblick auf einfache Variationsmöglichkeiten optimale Lösung zu finden. Neben der Aufteilung des Montagegestells in spiegelsymmetrische Viertel-Segmente galt das Augenmerk besonders der Gestaltung und Verteilung der Lastangriffspunkte. So wurde die Masse des Spektrographen zunächst durch ein Massenelement mit den entsprechenden Schwerpunktkoordinaten dargestellt, welches durch Stabelemente von praktisch unbegrenzter Steifigkeit mit dem Grundrahmen verbunden war. Da diese Elemente jedoch auf Grund ihrer Freiheitsgrade zueinander beweglich sind, verursachten sie bei der statischen Analyse unrealistische Verformungen des Grundrahmens. Deshalb musste die Gewichtskraft von Lucifer für diesen Teil der Aufgabe durch repräsentative Kräfte in $-z$ -Richtung an den entsprechenden Knotenpunkten des Rahmens ersetzt werden. Schwierig gestaltete sich auch die Verschmelzung der Knoten an den Verbindungsstellen der vier Hauptsegmente und zwischen der Bodenplatte und dem Montagegestell.

Letztlich wurden jedoch alle Probleme gelöst und ANSYS lieferte die gewünschten Berechnungsergebnisse, die zweifellos als aussagekräftige Entscheidungshilfe bei der Überführung des Konstruktionsentwurfs in eine endgültige Realisation des Montagegestells dienen können.

6. Anhang

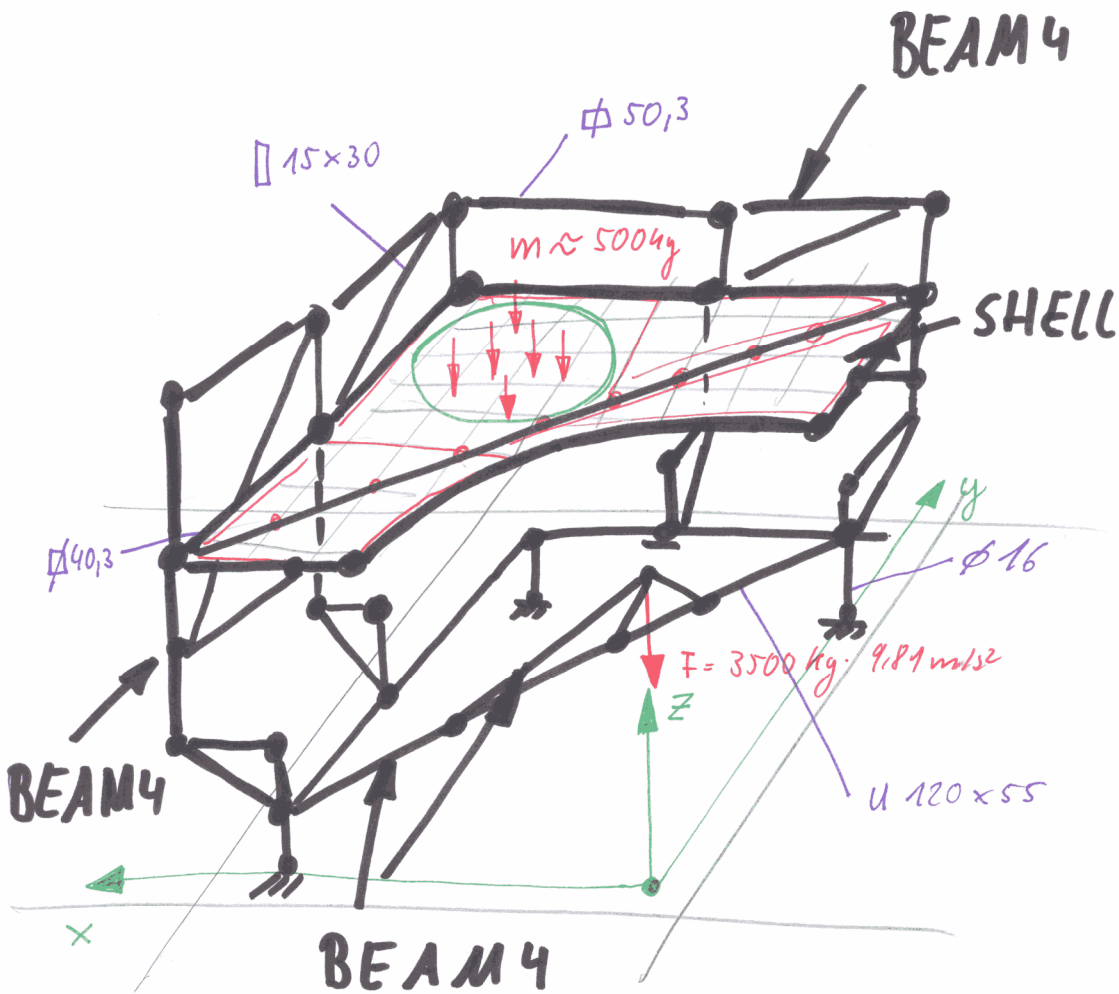
6.1. Profiltabelle

| Profil [mm] | Elementtyp | Real Constants Set | Material Model Number | Querschnittsfl#228;che [cm ²] | Fl#228;chent#228;gheitsmomente [cm ⁴] | |
|--|------------|--------------------|-----------------------|---|---|-----------------|
| | | | | | I _{YY} | I _{ZZ} |
|  <p>d = 16</p> | BEAM4 | 1 | 1 | 2,01 | 0,32 | 0,32 |
|  <p>B = 50, 45, 40 T = 3</p> | BEAM4 | 2 | 1 | 5,54 | 20,20 | 20,20 |
| | | | | 4,81 | 13,8 | 13,8 |
| | | | | 4,34 | 9,78 | 9,78 |
|  <p>B = 40, 35, 30 T = 3</p> | BEAM4 | 3 | 1 | 5,59 | 9,78 | 9,78 |
| | | | | 3,61 | 5,95 | 5,95 |
| | | | | 3,14 | 3,74 | 3,74 |
|  <p>b = 55 h = 120</p> | BEAM4 | 4 | 1 | 15,12 | 364 | 43,2 |

| Profil [mm] | Elementtyp | Real Constants Set | Material Model Number | Querschnittsfl#228;che [cm ²] | Fl#228;chentr#228;gheitsmomente [cm ⁴] | | Gewicht [kg] |
|--------------------------|------------|--------------------|-----------------------|---|--|-----------------|--------------|
| | | | | | I _{yy} | I _{zz} | |
| <p>h = 15, 20, 25</p> | SHELL63 | 5 | 2 | - | - | - | - |
| <p>B = 30 T = 3</p> | BEAM4 | 6 | 3 | 7,06 | 3,97 | 3,97 | - |
| | MASS21 | 7 | 1 | - | - | - | 3500kg |
| <p>s = 15 b = 30</p> | BEAM4 | 8 | 1 | 450 | 3,3750 | 0,84375 | - |

6.2. Skizzen, Katalogseiten

Skizze: Geometrie-erzeugung



⇒ Spiegeln!

Abb. 14: Handskizze Geometrie-Erzeugung

Formstahl warmgewalzter, rundkantiger U-Stahl

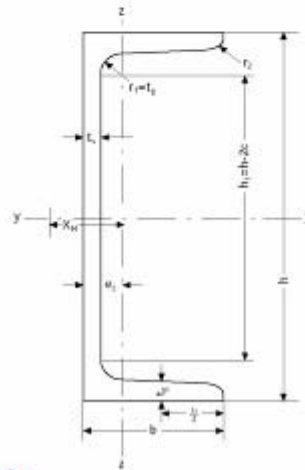
DIN 1026

Neigung der inneren Flanschlflächen
8% bei Profilen mit h ≤ 300
5% bei Profilen mit h > 300

| Bezeichnung | Maße | | | | HG | DIN | U | Für die Biegeachse | | | | | | | |
|-------------|------|--------|-----------------|-------------------|------|-------|-------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | Hohe | Breite | Stegd- dicke | Flansch- dicke | | | | y - y | | | x - x | | | | |
| | h | b | t _s | t _f | | | | I _y | W _y | I _x | I _x | W _x | I _x | | |
| | mm | mm | mm | mm | kg/m | kg/m | m ² /m | cm ⁴ | cm ³ | cm ⁴ | cm ³ | cm ⁴ | cm ³ | cm ⁴ | cm ³ |
| 80 | 80 | 45 | 6,0 | 8,0 | 8,9 | 8,64 | 0,312 | 106 | 26,5 | 3,10 | 19,4 | 6,36 | 1,33 | | |
| 100 | 100 | 50 | 6,0 | 8,5 | 10,9 | 10,60 | 0,372 | 206 | 41,2 | 3,91 | 29,3 | 8,49 | 1,47 | | |
| 120 | 120 | 55 | 7,0 | 9,0 | 13,7 | 13,40 | 0,434 | 364 | 60,7 | 4,62 | 43,2 | 11,30 | 1,59 | | |
| 140 | 140 | 60 | 7,0 | 10,0 | 16,4 | 16,00 | 0,489 | 605 | 86,4 | 5,45 | 62,7 | 14,80 | 1,75 | | |
| 160 | 160 | 65 | 7,5 | 10,5 | 19,3 | 18,80 | 0,546 | 925 | 116,0 | 6,21 | 85,3 | 18,30 | 1,89 | | |
| 180 | 180 | 70 | 8,0 | 11,0 | 22,5 | 22,00 | 0,611 | 1350 | 150,0 | 6,95 | 114,0 | 22,40 | 2,02 | | |
| 200 | 200 | 75 | 8,5 | 11,5 | 26,0 | 25,30 | 0,661 | 1910 | 191,0 | 7,70 | 148,0 | 27,00 | 2,14 | | |
| 220 | 220 | 80 | 9,0 | 12,5 | 30,0 | 29,40 | 0,718 | 2690 | 245,0 | 8,48 | 197,0 | 33,60 | 2,30 | | |
| 240 | 240 | 85 | 9,5 | 13,0 | 34,0 | 33,20 | 0,775 | 3600 | 300,0 | 9,22 | 248,0 | 39,60 | 2,42 | | |
| 260 | 260 | 90 | 10,0 | 14,0 | 39,0 | 37,90 | 0,834 | 4820 | 371,0 | 9,99 | 317,0 | 47,70 | 2,56 | | |
| 280 | 280 | 95 | 10,0 | 15,0 | 43,0 | 41,80 | 0,890 | 6280 | 448,0 | 10,90 | 399,0 | 57,20 | 2,74 | | |
| 300 | 300 | 100 | 10,0 | 16,0 | 48,0 | 46,20 | 0,950 | 8030 | 535,0 | 11,70 | 495,0 | 67,80 | 2,90 | | |
| 320 | 320 | 100 | 14,0 | 17,5 | 61,0 | 59,50 | 0,982 | 10870 | 679,0 | 12,10 | 597,0 | 80,60 | 2,81 | | |
| 350 | 350 | 100 | 14,0 | 16,0 | 62,0 | 60,60 | 1,050 | 12840 | 734,0 | 12,90 | 570,0 | 75,00 | 2,72 | | |
| 380 | 380 | 102 | 13,5 | 19,0 | 65,0 | 63,10 | 1,110 | 15760 | 829,0 | 14,00 | 615,0 | 78,70 | 2,77 | | |
| 400 | 400 | 110 | 14,0 | 18,0 | 74,0 | 71,80 | 1,180 | 20350 | 1020,0 | 14,90 | 846,0 | 102,00 | 3,04 | | |

Maße in mm

J = Trägheitsmoment
W = Widerstandsmoment
I = Trägheitshalbmesser
(bezogen auf die zugehörige Biegeachse)
U = Mantelfläche



Stahlbauhohlprofile

Abmessungen nach Euronorm und Ergänzungsabmessungen

Lieferbare Güten

Normen für Maße und Toleranzen

S 235 JRH (vormals St 37-2) mit Kerbschlagprobe bei Raumtemperatur
S 275 JRH (vormals St 44-3)
S 355 JRH (vormals St 52-3) mit Kerbschlagprobe bei -20 °C

☐ kaltgefertigt EN 10 210

S 275 JRH (vormals St 44-3)
S 355 JRH (vormals St 52-3) mit Kerbschlagprobe bei 0 °C

■ warmgefertigt EN 10 210

sowie in Feinkornqualitäten

| B mm | B mm | T mm | M kg/m | A cm ² | I cm ⁴ | J cm | W _y cm ³ | W _x cm ³ | I _y cm ⁴ | I _x cm ⁴ | C _y cm ³ | A _s m ² /m |
|------|------|------|--------|-------------------|-------------------|------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| ☐ 20 | 20 | 2,0 | 1,05 | 1,34 | 0,69 | 0,72 | 0,69 | 0,88 | 1,21 | 1,06 | 0,073 | |
| ☐ 25 | 25 | 2,5 | 1,64 | 2,09 | 1,69 | 0,90 | 1,35 | 1,71 | 2,97 | 2,07 | 0,091 | |
| ☐ 25 | 25 | 3,0 | 1,89 | 2,41 | 1,84 | 0,87 | 1,47 | 1,91 | 3,33 | 2,27 | 0,090 | |
| ☐ 30 | 30 | 2,0 | 1,68 | 2,34 | 2,72 | 1,13 | 1,81 | 2,21 | 4,54 | 2,75 | 0,113 | |
| ■ 30 | 30 | 2,0 | 1,72 | 2,20 | 2,84 | 1,14 | 1,89 | 2,29 | 4,53 | 2,75 | 0,115 | |
| ☐ 30 | 30 | 2,5 | 2,03 | 2,99 | 3,16 | 1,10 | 2,10 | 2,61 | 5,40 | 3,20 | 0,111 | |
| ■ 30 | 30 | 2,5 | 2,11 | 2,68 | 3,33 | 1,11 | 2,22 | 2,74 | 5,40 | 3,22 | 0,114 | |
| ☐ 30 | 30 | 3,0 | 2,36 | 3,01 | 3,50 | 1,08 | 2,34 | 2,96 | 6,15 | 3,58 | 0,110 | |
| ■ 30 | 30 | 3,0 | 2,47 | 3,34 | 3,74 | 1,09 | 2,50 | 3,14 | 6,16 | 3,60 | 0,112 | |
| ☐ 35 | 35 | 3,0 | 2,83 | 3,61 | 5,95 | 1,28 | 3,40 | 4,23 | 10,22 | 5,18 | 0,130 | |
| ☐ 38 | 38 | 3,0 | 3,12 | 3,97 | 7,85 | 1,41 | 4,13 | 5,10 | 13,30 | 6,28 | 0,142 | |
| ☐ 40 | 40 | 2,0 | 2,31 | 2,94 | 6,94 | 1,54 | 3,47 | 4,13 | 11,30 | 5,23 | 0,153 | |
| ☐ 40 | 40 | 2,5 | 2,62 | 3,99 | 8,22 | 1,51 | 4,11 | 4,97 | 13,60 | 6,21 | 0,151 | |
| ■ 40 | 40 | 2,5 | 2,69 | 3,68 | 8,54 | 1,52 | 4,27 | 5,14 | 13,60 | 6,22 | 0,154 | |
| ☐ 40 | 40 | 2,9 | 3,31 | 4,21 | 9,54 | 1,50 | 4,77 | 5,81 | 15,30 | 6,93 | 0,153 | |
| ■ 40 | 40 | 3,0 | 3,30 | 4,21 | 9,32 | 1,49 | 4,66 | 5,72 | 15,80 | 7,07 | 0,150 | |
| ☐ 40 | 40 | 3,0 | 3,41 | 4,34 | 9,78 | 1,50 | 4,89 | 5,97 | 15,70 | 7,10 | 0,152 | |
| ■ 40 | 40 | 3,2 | 3,61 | 4,60 | 10,20 | 1,49 | 5,11 | 6,28 | 16,50 | 7,42 | 0,152 | |
| ■ 40 | 40 | 3,6 | 4,01 | 5,30 | 11,10 | 1,47 | 5,54 | 6,88 | 18,10 | 8,01 | 0,151 | |
| ☐ 40 | 40 | 4,0 | 4,20 | 5,35 | 11,10 | 1,44 | 5,54 | 7,01 | 19,40 | 8,48 | 0,146 | |
| ■ 40 | 40 | 4,0 | 4,38 | 5,99 | 11,80 | 1,45 | 5,91 | 7,44 | 19,50 | 8,54 | 0,150 | |
| ■ 40 | 40 | 4,5 | 4,85 | 6,17 | 12,70 | 1,43 | 6,33 | 8,08 | 21,10 | 9,11 | 0,148 | |
| ■ 40 | 40 | 5,0 | 5,28 | 6,73 | 13,40 | 1,41 | 6,68 | 8,66 | 22,50 | 9,60 | 0,147 | |
| ■ 40 | 40 | 5,6 | 5,78 | 7,37 | 14,10 | 1,38 | 7,03 | 9,28 | 24,00 | 10,10 | 0,146 | |
| ■ 40 | 40 | 6,3 | 6,33 | 8,07 | 14,70 | 1,35 | 7,34 | 9,90 | 25,40 | 10,50 | 0,144 | |
| ■ 40 | 40 | 7,1 | 6,91 | 8,90 | 15,10 | 1,31 | 7,57 | 10,50 | 26,50 | 10,80 | 0,142 | |
| ☐ 45 | 45 | 3,0 | 3,77 | 4,81 | 13,80 | 1,69 | 6,12 | 7,44 | 23,00 | 9,27 | 0,170 | |
| ☐ 50 | 50 | 2,0 | 2,03 | 3,74 | 14,10 | 1,95 | 5,66 | 6,66 | 22,60 | 8,51 | 0,193 | |
| ☐ 50 | 50 | 2,5 | 3,60 | 4,59 | 16,90 | 1,92 | 6,78 | 8,07 | 27,50 | 10,20 | 0,191 | |
| ■ 50 | 50 | 2,5 | 3,68 | 4,68 | 17,50 | 1,93 | 6,99 | 8,29 | 27,50 | 10,20 | 0,194 | |
| ☐ 50 | 50 | 2,9 | 4,22 | 5,37 | 19,70 | 1,91 | 7,87 | 9,43 | 31,20 | 11,50 | 0,193 | |
| ☐ 50 | 50 | 3,0 | 4,25 | 5,41 | 19,50 | 1,90 | 7,79 | 9,39 | 32,10 | 11,80 | 0,190 | |
| ☐ 50 | 50 | 3,0 | 4,35 | 5,54 | 20,20 | 1,91 | 8,08 | 9,70 | 32,10 | 11,80 | 0,192 | |
| ■ 50 | 50 | 3,2 | 4,62 | 5,88 | 21,20 | 1,90 | 8,49 | 10,20 | 33,80 | 12,40 | 0,192 | |
| ■ 50 | 50 | 3,6 | 5,14 | 6,54 | 23,20 | 1,88 | 9,27 | 11,30 | 37,20 | 13,50 | 0,191 | |
| ☐ 50 | 50 | 4,0 | 5,45 | 6,95 | 23,70 | 1,85 | 9,49 | 11,70 | 40,40 | 14,40 | 0,186 | |
| ■ 50 | 50 | 4,0 | 5,64 | 7,19 | 25,00 | 1,86 | 9,99 | 12,30 | 40,40 | 14,50 | 0,190 | |
| ■ 50 | 50 | 4,5 | 6,26 | 7,97 | 27,00 | 1,84 | 10,80 | 13,40 | 44,10 | 15,60 | 0,188 | |
| ☐ 50 | 50 | 5,0 | 6,56 | 8,36 | 27,00 | 1,80 | 10,80 | 13,70 | 47,50 | 16,60 | 0,183 | |
| ☐ 50 | 50 | 5,0 | 6,85 | 8,78 | 28,90 | 1,82 | 11,60 | 14,50 | 47,60 | 16,70 | 0,187 | |
| ■ 50 | 50 | 5,6 | 7,54 | 9,61 | 30,80 | 1,79 | 12,30 | 15,70 | 51,30 | 17,80 | 0,186 | |
| ■ 50 | 50 | 6,0 | 7,99 | 10,20 | 32,00 | 1,77 | 12,80 | 16,50 | 53,60 | 18,40 | 0,185 | |
| ■ 50 | 50 | 6,3 | 8,31 | 10,60 | 32,80 | 1,76 | 13,30 | 17,00 | 55,20 | 18,80 | 0,184 | |
| ■ 50 | 50 | 7,1 | 9,14 | 11,60 | 34,50 | 1,72 | 13,80 | 18,30 | 58,90 | 19,80 | 0,182 | |
| ■ 50 | 50 | 8,0 | 10,00 | 12,80 | 36,00 | 1,68 | 14,40 | 19,50 | 62,30 | 20,60 | 0,179 | |
| ☐ 60 | 60 | 2,0 | 3,56 | 4,54 | 25,10 | 2,35 | 8,38 | 9,79 | 39,80 | 12,60 | 0,233 | |
| ☐ 60 | 60 | 2,5 | 4,39 | 5,59 | 30,30 | 2,33 | 10,30 | 11,90 | 48,70 | 15,20 | 0,231 | |
| ☐ 60 | 60 | 2,5 | 4,46 | 5,68 | 31,10 | 2,34 | 10,40 | 12,20 | 48,50 | 15,20 | 0,234 | |
| ■ 60 | 60 | 2,9 | 5,13 | 6,53 | 35,20 | 2,32 | 11,70 | 13,90 | 55,30 | 17,20 | 0,233 | |
| ☐ 60 | 60 | 3,0 | 5,19 | 6,61 | 35,10 | 2,31 | 11,70 | 14,00 | 57,10 | 17,70 | 0,230 | |

6.3. Literaturhinweise

- ¹ Vgl. HÜTTE *Bautechnik IV; Konstruktiver Ingenieurbau 1: Statik;*
29. Auflage; Springer-Verlag Berlin / Heidelberg 1988
S. 220 ff.; Lineare Plattentheorie